

СОКРАЩЕНІЕ

ВЫШНЕЙ МАТЕМАТИКИ

СОЧИНЕННОЕ

ПетромЪ ГиларовскимЪ, учителемЪ Математики и Физики вЪ учительской Гимназіи, Физики вЪ обществѣ благородныхЪ дѣвицЪ, Россійскаго слога и Латинскаго языка вЪ благородномЪ ПажескомЪ Корпусѣ.





Печатано вЪ типографіи Вильковского.

ВЪ Санктпетербургѣ 1796 года.

Содержанїе и порядокъ разположенїя.

А) *Сокращенїе вышней Алгебры* т. е. *Дифференцїальнаго и Интегральнаго счисленїя.*

в) *Высшая Геометрїя*, или *ученїе о кривыхъ линеяхъ.* Она раздѣляется на двѣ части, изъ коихъ.

I) Содержитъ сѣченїя Коническїя, а имянно: съ § 3 — до 12 свойства всѣхъ сѣченїй коническихъ; съ 12 — 16 фокусы всѣхъ сѣчен. кон.; съ 16 — 24 радїусы движенїя (radii vectores); съ 24 — 32 субтангенсы и субнормальныя; съ 32 — 35 опускаемые изъ фокусовъ на тангенсы перпендикулары; съ 35 — 41 асимптоты; съ 41 — 50 дїаметры; съ 50—54 радїусы кривизны (radii curuedinis, radii osculi); съ 54 — 60 площади криволинейныхъ пространствъ; съ 60—66 толстоты тѣлъ и проч. съ 66 — 69 наружная поверхность ихъ; съ 69 — 72 спрямленїе кривыхъ линей, съ 71 до конца сей части превратный способъ

тан-

тангенсовъ И такъ сія часть содержитъ XIII трактатовъ.

2) Содержитъ въ себѣ ученіе о другихъ кривыхъ линеяхъ какъ Алгебраическихъ такъ и Трансцендентныхъ, а имянно о *Конхоидѣ*, *Циссоидѣ*, *Логариѳмикѣ*, *Спиральной*, *Циклоидѣ* и *Квадратриксѣ* съ показаніемъ употребленія особливо Логарифмики и Циклоиды.

На конецъ приложено понятіе о дифференціалахъ второй степени и ихъ употребленіе.

Поелику сіе сочиненіе служитъ дополненіемъ къ физикѣ Гиларовскаго; то приложены нѣкоторыя поправки въ разсужденіи фигуръ Физики.

НАЧАЛЬ-

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

Высшей Алгебры

§ 1

Каждое количество можетъ увеличиваться и уменьшаться двоякимъ образомъ: 1] получая вдругъ все приращеніе или умаленіе 2] переходя всѣ возможныя степени.

§ 2.

Какъ бы увеличеніе и уменьшеніе ни было мало, степеней всегда бываетъ безконечное множество, на пр. между дробьми $\frac{1}{7}$ и $\frac{2}{7}$ безконечное есть множество среднихъ дробей. Между дугою AH и AD фиг. II. какъ бы H къ D близка ни была безмѣрное множество есть степеней, кои должна пройти AH, дабы сравняться съ AD; такъ же между перпендикуляромъ HP и DL среднихъ находится безчисленное множество. Приращеніе или умаленіе столь малое, что изобразить его никакою дробью нѣтъ способа, назвалъ Лейбницъ *разностью* (differentia); а вычисленіе такихъ разностей, *дифференціальнымъ* вычисленіемъ (Calculus differentialis).

§ 3.

§ 3.

Хотя такія малыя разности сами по себѣ ничего не значатъ; но содержаніями своими показываютъ свойства увеличивающихся или умаляющихся количествъ. Почему вычисленіе сіе весьма важно, какъ то въ послѣдствіи сіе самимъ дѣломъ оправдится.

§ 4.

Само по себѣ видно, что тѣ только количества принимаютъ такія разности, кои перемѣнны; а постоянныя со всѣмъ ихъ не имѣютъ. Перемѣнныя означаются послѣдними буквами алфавита, а постоянныя первыми. Безмѣрно малая разность какого нибудь перемѣннаго количества означается буквою d такъ, что dx есть такая разность отъ количества x. По сему остерегаться должно, чтобъ постоянныхъ величинъ не означать никогда буквою d, дабы не было сумнѣнія въ разсужденіи того, что d означаетъ.

§ 5.

Состояніе, въ которомъ находится какое нибудь перемѣнное количество, называется его *Функціею.* на пр. $x+a$, $x-a$, ax, x^m суть разныя функціи количества x.

§ 6.

§ 6.

Взять дифференціалъ отъ какой нибудь функціи количества перемѣннаго есть нечто иное, какъ представить перемѣну, которая въ ней произойти должна отъ того, что самое перемѣнное количество принимаетъ приращеніе или умаленіе.

§ 7.

Дифференціалъ функціи $b+x$ есть dx. Ибо поставивши въ ней вмѣсто x, $x+dx$, получимъ функцію: $b+x+dx$ Слѣдовательно разность отъ прежней будетъ dx Такъ же $d(b-x)=-dx$. Ибо естьли вмѣсто x поставить $x+dx$, выйдетъ функція: $b-x-dx$. Слѣдственно разность отъ прежней будетъ $-dx$. По сему $d(x+y)=dx+dy$. Ибо положивъ вмѣсто x, $x+dx$, а вмѣсто y, $y+dy$, понять легко, что функція $x+y$ сдѣлается такою: $x+y+dx+dy$. Слѣдственно разность отъ прежней будетъ $dx+dy$. Точно такъ же $d(x-y)=dx-dy$. При семъ замѣтить должно, что ежели вмѣсто x поставляемъ $x+dx$, то хотя выходящая чрезъ сіе функція и не всегда дѣлается нѣсколько большею прежней; однако всегда должно вычитать изъ нее прежнюю, чтобъ соблюсть единообразіе: на противъ того, ежели вмѣсто x

 поста-

поставлять $x-dx$, то новую функцію должно вычитать изъ прежней. Ибо въ Алгебрѣ и отрицательныя разности имѣютъ мѣсто.

§ 8.

Дифференціалъ произведенія xy сыщется, когда вмѣсто x поставивъ $x+dx$, а вмѣсто y, $y+dy$, обѣ сіи величины умножимъ и изъ оной функціи прежнюю вычтемъ. Тогда выйдетъ функція: $xy+xdy+ydx+dxdy$; а разность отъ прежней выйдетъ $xdy+ydx+dxdy$. Но какъ произведеніе двухъ безконечно малыхъ величинъ $dx . dy$ есть такая часть отъ dx сколь великъ dy, или есть безконечно малая дробь отъ dx, какъ то извѣстно изъ ученія о дробяхъ; то членъ функціи $dxdy$ и оставляется такъ, какъ безконечная малость въ разсужденіи другихъ членовъ. По сему $dxy=xdy+ydx$. Отсюда видно, что 1) ежели вмѣсто x поставится a; то day будетъ $=ady$. Ибо членъ $yda=o$ за тѣмъ, что a есть постоянное количество (§ 4). 2) Ежели вмѣсто x поставить zx; то прежде по правилу сего параграфа $dzx=xdz+zdx$, по томъ поставивши вмѣсто x, zx, а вмѣсто dx, dzx, и умноживши dzx на y, получимъ $dzxy=zxdy+zydx+yxdz$. Такимъ образомъ отъ произведенія 4 5, и большаго числа перемѣнныхъ количествъ Дифференціалъ сыскать можно. 3) Ежели вмѣсто y поставится x такъ, что xy перемѣнится въ x^2; то $dxx=$

xdx

$xdx+xdx=2xdx$. По сему поставивъ вмѣсто y, x^2, будетъ $dx\,x^2=x^2dx+xdx^2$ Но $dx^2=2xdx$. Слѣдовательно $dx.^2x=dx^3=x^2dx+2x^2dx=3x^2dx$ Такъ же $dx^4=4x^3dx$, $dx^5=5x^4dx$ и вообще дифференціалъ всякой степени отъ x равенъ дифференціалу x умноженному на показателя степени и на самую степень съ уменшеніемъ показателя единицею такъ, что $dx^n=nx^{n-1}dx$. 4) когда показатель n есть дробь, или когда степень отъ x есть въ самомъ дѣлѣ корень какой нибудь степени отъ x; тогда стоитъ только n превратить въ коренной знакъ, чтобъ получить дифференціалъ отъ корня. Такъ

$$dx^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.\,dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{2},=\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{dx}{2\sqrt{x}};$$ такъ же

$$dx^{\frac{1}{3}}=d\sqrt[3]{x}=\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$ и вообще

$$d\sqrt[n]{x^m}=dx^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}.\,x^{\frac{m-1}{n}}dx.=\frac{mdx}{n\sqrt[n]{x^{m-n}}}$$ По сему отъ всякихъ корней удобно брать дифференціалы, и не превращая съ начала коренные знаки въ показателей, а послѣ показателей опять въ коренные знаки. 5) ежели вмѣсто y поставить z^{-1} то $dxy=dxz.^{-1}=z^{-1}dx+xdz^{-1}$; но $dz^{-1}=-z^{-2}dz=-\frac{dz}{z^2}$.

Слѣдовательно $dx.\,z^{-1} = d\frac{x}{z} = \frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z2} = \frac{zdx - xdz}{z^2}$.
По сему дифференцїалъ каждой дроби равенъ разности произведенїя знаменателя на дифференцїалъ числителя и произведенїя числителя на дифференцїалъ знаменателя, раздѣленной на квадратъ знаменателя.

§ 9.

Представивши себѣ все сїе обстоятельно, не трудно уже брать дифференцїалы отъ сложныхъ функцїй. Такъ на пр. $d\frac{x^2}{y}$ т. е. дифференцїалъ функцїи содержащей степень и дробь по 3 и 5 пунктамъ § 8 равенъ $\frac{ydx^2 - x^2dy}{y^2}$; а какъ $dx^2 = 2xdx$ по 3 пункту: то $d\frac{x^2}{y} = \frac{2xydx - x^2dy}{y^2}$ Такъ же $d\frac{xz}{\sqrt{y}}$ по 5 пункту равенъ $\frac{\sqrt{y}.dxz - xzd\sqrt{y}}{y}$; но dxz по 1 пункту $= xdz + zdx$, а $d\sqrt{y}$ по 4 пункту $= \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Слѣдователь-

но $d\frac{xz}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}dz + z\sqrt{y}.dx - \frac{xzdy}{2\sqrt{y}}}{y} = \frac{2xydz + 2zydx - xzdy}{2y\sqrt{y} = 2\sqrt{y^3}}$

Вообще дабы взять дифференціалъ отъ сложной функціи, должно съ начала всѣ ея части принять за простыя количества и означить дифференціалы ихъ буквою d, а по томъ вмѣсто d поставлять по пунктамъ § 7 и 8. надлежащіе дифференціалы, въ чемъ всѣ затрудненія и самая малая привычка удобно изтребить можетъ. По сему весьма полезно дѣлать самому себѣ задачи для взятія дифференціаловъ отъ функцій, которыя бы сколько можно были сложнѣе на пр.

$d(x^m y^n z^r + \frac{\sqrt{u}}{t})$ съ начала есть $d(x^m y^n z^r) + d\frac{\sqrt{u}}{t}$ по § 7; по томъ $d(x^m y^n z^r) = x^m y^n dz^r + y^n z^r dx^m + z^r x^m dy^n$ по 1 пункту § 8, а $dz^r = rz^{r-1}dz$, $dx^m = mx^{m-1}dx$, $dy^n = ny^{n-1}dy$; слѣдовательно $d(x^m y^n z^r) = rz^{r-1}x^m y^n dz + mx^{m-1}y^n z^r dx y +$

ny

$ny^{n-1}z^{r}x^{m}dy$. Къ сему дифференцїалу должно придать $d\frac{\sqrt{u}}{t}$, который по 4 и 5 пункту § 8 $=$

$$\frac{td\sqrt{u} - \sqrt{u}dt}{t^2} = \frac{tdu - 2udt}{2\sqrt{u}.\,t^2} = \frac{tdu - 2udt}{2t^2\sqrt{u}}$$

§ 10.

Дифференцїалы тригонометрическихъ линей сыскиваются слѣдующимъ образомъ: дифференцїалъ синуса дуги x удобно найдется, ежели вмѣсто x, какъ прежде, положится $x+dx$. Тогда будетъ по правиламъ тригонометрїи $\sin(x+dx) = \sin x.\cos dx + \cos x.\sin dx$; но $\cos dx$ или косинусъ безконечно малой дуги безконечно мало разнится отъ радїуса и слѣдовательно можетъ быть безъ чувствительной погрѣшности принятъ за радїусъ; а $\sin dx$ безконечно мало разнится отъ самой дуги dx такъ, что она вмѣсто его поставлена быть можетъ. По сему назвавши радїусъ единицею, какъ онъ въ оной формулѣ и приемлется, получимъ $\sin(x+dx) = \sin x + dx\cos x$. Слѣдовательно разность $\sin(x+dx)$ и $\sin x$ будетъ равна $dx\cos x$, или $d\sin x = dx\cos x$. Такъ же $d\cos x$ сыщется по формулѣ $\cos(x+dx) = \cos x\cos dx - \sin x\sin dx$.

равенъ

равенъ $-dx\sin x$. Ибо хотя косинусъ тѣмъ становится меньше, чѣмъ дуга больше, однако изъ $\cos(x+dx)$ надлежитъ вычесть $\cos x$. Отсюда удобно сыскать дифференціалы Тангенса, Котангенса, Секанса и Косеканса зная, что $tg = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{\cos}{\sin}$, $\sec = \frac{1}{\cos}$, а $\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$.

§ 11.

Слѣдовало бы здѣсь показать, какъ дифференціалъ логариѳма находится т. е. чему равенъ $d\log x$; но какъ сіе гораздо удобнѣе сдѣлать посредствомъ линеи логариѳмической; то о семъ и будетъ предложено ниже см. §. 93 о кривыхъ линеяхъ.

§ 12.

Имѣя о дифференціалахъ понятіе въ сихъ параграфахъ предложенное, можно уже употребить ихъ себѣ въ пользу слѣдующимъ образомъ: многія количества перемѣнныя и многія ихъ функціи могутъ увеличиваться и уменшаться до извѣстнаго только предѣла. Сіи то самыя высшія и самыя нижайшія степени находить во многихъ случаяхъ весьма нужно и посредствомъ дифференціальнаго вычисленія весьма удобно. Ибо когда перемѣнное количество дойдетъ до самой выс-

шей или до самой нижней степени такЪ, что уже болѣе увеличиваться или уменшаться не можетЪ; тогда оно сдѣлается постояннымЪ; слѣдственно тогда дифференціалЪ его равенЪ будетЪ нулю по § 3. И такЪ стоитЪ только дифференціалЪ количества перемѣннаго или его функціи положить равнымЪ нулю, дабы найти самую высшую, или самую нижайшую степень, или опредѣлить, чему перемѣнное количество тогда равно бываетЪ. Но какЪ положивши дифференціалЪ равнымЪ нулю, опредѣляется либо самая высшая, либо самая нижняя степень; то еще нужно узнавать, которая изЪ нихЪ имѣетЪ мѣсто. Сіе сдѣлать удобно, полагая прежде вмѣсто x опредѣленное знаменованіе количества x, а потомЪ оное же $+dx$ и $-dx$. Ежели вЪ обоихЪ случаяхЪ функція сдѣлается меньше, нежели отЪ сысканной величины x, то степень есть самая высшая; ежели же будетЪ функція больше, поставляя вмѣсто x, $x+dx$, и $x-dx$; то сія степень есть самая меньшая. Ибо когда $+dx$ и $-dx$ дѣлаютЪ функцію большею оной степени, очевидно она есть самая меньшая, когда же $+dx$ и $-dx$ дѣлаютЪ ее меньшею, то оная есть самая большая. Все сіе удобнѣе будетЪ понять изЪ слѣдующихЪ примѣровЪ: f) Линея *a* можетЪ безконечно многоразлично раздѣлена быть на двѣ части; пре-

требуется найти такія части, чтобъ произведеніе ихъ было самое большее.

Положимъ одну часть $= x$, другая будетъ $a-x$, а произведеніе будетъ $= ax - xx$, дифференціалъ его $adx - 2xdx$ положивши равнымъ нулю т. е. $a - 2x = 0$, получимъ $a = 2x$ и $x = \frac{a}{2}$; По сему и другая часть будетъ $= \frac{a}{2}$ и функція оная будетъ $= \frac{a^2}{4}$. И такъ выходитъ, что самое большее, или самое меньшее произведеніе частей линеи бываетъ тогда, когда она раздѣляется по поламъ. Остается узнать, которая степень имѣетъ мѣсто. Положивъ въ функціи $ax - xx$, вмѣсто x не просто найденную величину $\frac{a}{2}$, но $\frac{a}{2} + dx$ выйдетъ функція: $\frac{a^2}{2} + adx - \frac{a^2}{4} - adx - (dx)^2 = \frac{a^2}{4} - (dx)^2 < \frac{a^2}{4}$. Такъ же положивъ вмѣсто x, $\frac{a}{2} - dx$, получимъ функцію: $\frac{a^2}{2} - adx - \frac{a^2}{4} +$

adx –

$adx-(dx^2)=\frac{a^2}{4}-(dx)^2<\frac{a^2}{4}.$ Слѣдовательно сте

пень функціи, когда $x=\frac{a}{2}$, есть самая вы

шая. b) Найти, когда произведеніе квадра та одной части линеи a на другую быва етъ самое большее? положивъ одну часть $=x$ получимъ оное произведеніе $=ax^2-x^3$, а ежел дифференціалъ его $2axdx-3x^2dx$ положимъ $=o$

выйдетъ $x=\frac{2a}{3}$, т. е. что тогда сіе про

изведеніе есть самое большее, когда одна часть $=\frac{2}{3}$, а другая $=\frac{1}{3}$, какъ то можно въ семъ увѣриться и показаннымъ призна комъ и поставляя вмѣсто a разныя числа c) Найти, когда перпендикуларъ изъ окру жности на діаметръ опущенный, бываетъ са мый большій? положивъ одинъ отрѣзокъ діаметра $=x$, а другой $a-x$, ежели діаметръ $=a$, выйдетъ произведеніе изъ $ax-xx=$ квад рату онаго перпендикулара. И такъ ежели положимъ $adx-2xdx=o$, получимъ $a=$

$2x$ и $x=\frac{a}{2}$ т. е. тогда перпендикуларъ бы

ваетъ самый большій, когда онъ возставленъ на діаметрѣ въ разстояніи отъ окружности

равномъ

равномъ радїусу, или изъ центра. d) По данной полстотѣ параллелепипеда m^3 и одному его протяженїю на пр. высотѣ b, найти другїя протяженїя т. е. долготу и широту, при которыхъ поверхность его была бы самая меньшая? положивъ одно изъ протяженїй искомыхъ $= x$, другое будетъ $= \frac{m^3}{bx}$; слѣдовательно поверхность будетъ $= \frac{2m^3}{b} + \frac{2m^3}{x} + 2bx$, а дифференцїалъ ея $= 2bdx - \frac{2m^3 dx.}{x^2}$ И такъ положивъ оный равнымъ нулю получимъ $bx^2 = m^3$ и $x = \sqrt{\frac{m^3.}{b}}$ По сему $\frac{m^3}{bx} = \sqrt{\frac{m^3}{b}}$ и вся поверхность $= 4\sqrt{m^3 b} + \frac{2m^3}{b}$, которая и есть самая меньшая, какъ то легко узнать по предложенному выше признаку и по примѣрамъ въ числахъ на пр. положивъ $m^3 = 320^I$ а $b = 5^I$, выйдетъ $x = = 8$ и $\sqrt{\frac{m^3}{b}} = 8$ такъ, что вся поверхность будетъ $= 80 + 80 + 128 = 288$; естьли же вмѣсто x

положится на пр. 16, а вмѣсто $\sqrt{\frac{m^3}{b}}$ — 4; чрез
что толстота параллелепипеда не перемѣнится, то поверхность будетъ = 160+40+128 = 328 такъ, что въ первомъ случаѣ въ разсужденіи матеріала будетъ выгоды на 40 квадратныхъ футовъ. e) Дана величина двухъ совершенно упругихъ шаровъ a и b, требуется найти, сколь великъ долженъ быть посредствующій между ими шаръ m, который бы скоростію сообщенною ему отъ шара a произвелъ самое большее дѣйствіе на покоящійся шаръ b? изъ Механики извѣстно см. 462 стр. физики Гиларовскаго, что ежели скорость ударяющаго тѣла A = c, а ударяемаго B = d; то послѣ удара скорость ударяемаго будетъ $\frac{Ad + 2Ac - Bd}{A+B}$, или $\frac{2Ac}{A+B}$, когда B покоится или d = o. И такъ скорость, которую получитъ покоящійся шаръ m отъ

a = $\frac{2ac}{a+m}$, называя скорость, шара a буквою c.

Теперь сію скорость должно умножить опять на удвоенной составъ шара m и раздѣлить на сумму m+b, чтобъ получить скорость, которая отъ m сообщится шару b. И такъ

скорость

скорость $b = y = \frac{4acm}{(a+m)(m+b)}$. Взявши дифференціалъ сего количества, гдѣ m только перемѣненъ и положивъ его = o, рѣшимъ задачу

$$d\frac{4acm}{am+mm+ab+bm} = \frac{4acdm.(am+mm+ab+bm-(4acm)(adm+2mdm+bdm)}{} = o$$

И такъ $am+mm+ab+bm = am+2m^2+bm$, или $m^2 = ab$. т. е. m есть среднїй пропорцїональный между a, b. Слѣдовательно въ такомъ ряду упругихъ шаровъ, гдѣ каждый между двумя другими находящїйся есть между ими среднїй пропорцїальный, самый послѣднїй получитъ самую большую, изъ всѣхъ возможныхъ, скорость.

§ 13.

Употребленїе дифференцїальнаго вычисленїя въ сыскиванїи нѣкоторыхъ прямыхъ линей въ вышней Геометрїи весьма употребительныхъ и нужныхъ показано будетъ ниже. А многоразличное его употребленїе въ механикѣ и физикѣ приложено на концѣ физики Гиларовскаго.

§ 14.

По данному дифференцїалу найти ту саму

мую Функцію, отъ коей онъ взятъ, называется взять *интегралъ*. Онъ означается обыкновенно буквою S. Такъ на пр инте-

гралъ отъ dx есть x или $sdx = x$, $s\frac{(ydx-xdy)}{y^2} = \frac{x}{y}$;

какъ то удобно можно сіе понять, зная вышесказанное. По чему стоитъ только помнить правила брать дифференціалы, дабы вдругъ находить интегралы, однако жъ для удобнѣйшаго разумѣнія сего предложенія кратко представлю интегралы отъ разныхъ функцій 1) $f(dx \pm dy) = x \pm y$ 2) $f(ydx+xdy) =$

xy 3) $s.(\frac{ydx-xdy}{y2}) = \frac{y}{x}$. По сему $s\frac{(-ady)}{y2} = \frac{a}{y}$ 4)

$f(mx^{m-1}dx) = x^m$. т. е. дабы взять интеграл отъ дифференціала степени x, должно съ начала къ показателю степени придать 1 и на сію сумму умноженную на dx раздѣлить предложенный дифференціалъ. Такъ

$s\frac{2x^3dx}{3} = \frac{x^4}{6}$ и $s2x^{-2}dx = - 2x^{-1} = -\frac{2}{x}$ и пр.

Естьли количество возвышенное до какой нибудь степени состоитъ изъ двухъ или многихъ членовъ; то дабы удобнѣе было взять его интегралъ, должно всѣ члены сравнить съ какимъ нибудь однимъ перемѣннымъ количествомъ и вмѣсто ихъ дифференціала взять дифферен-

дифференціала взять дифференціалъ сего; на пр $s.\, m\,(a+by)^{m-1}\, bdy$ удобнѣе сыщется, положивъ $a+by = x$. По сему $bdy = dx$ такъ, что $s.\, m\,(a+by)^{m-1}\, bdy = s.\, m\, x^{m-1}\, dx = x^m = (a+by)^m$.

5. Интегралы отъ дифференціаловъ корней легче брать приводя ихъ въ степени, или вводя вмѣсто корней показателей. Такъ $s\frac{dx.}{2\sqrt{x}} = \int\frac{dx}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, приложивъ къ показателю 1 и раздѣливъ на сію сумму и на dx выйдетъ $s\frac{dx.}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\,\frac{2}{1}.\, x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Въ прочемъ замѣтить нужно, что $s\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. Такъ же $s\frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{x}$ и вообще $\int\frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} = \sqrt[m]{x}$. А чтобъ сыскивать интегралы отъ такихъ дифференціаловъ, въ коихъ подъ корнемъ стоятъ многіе члены, должно ихъ всѣ полагать равными одному перемѣнному количеству на пр. $s\frac{adx + 2xdx.}{2\sqrt{(ax+x^2)}}$, положивъ $ax+x^2 = y$ и $adx + 2xdx = dy$,

будетъ $= s.\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$. Отсюда видно, что онъ равенъ $\sqrt{(ax+xx)}$. 6) удобно себѣ представить зная сказанное въ § 10 что $S.dx.\cos x = \sin x$, что $s.-dx\sin x = \cos x$, и что поелику $dx = \frac{d\cos x}{-\sin x}$; то когда $\cos x$ назовется ω, $s\frac{d\cos x}{-\sin x} = s\frac{-d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$ = дугѣ x, коей косинусъ есть ω.

§ 15.

Въ разсужденiи интеграловъ замѣтить должно слѣдующiя двѣ вещи: 1) поелику $d(x \pm a) = dx$ точно такъ же, какъ и дифференцiалъ отъ x; то поданному дифференцiалу dx или подобному ему не можно узнать постоянныхъ количествъ, кои съ перемѣнными совокуплены были; а должно до сего доходить чрезъ разсужденiе о самой задачѣ, полагая перемѣнное количество равнымъ o и смотрѣть дѣлается ли чрезъ то интегралъ = o, когда очевидно по существу задачи должно ему сдѣлаться = o какъ то въ § 67 показано. По сему иногда бываетъ нужно по взятiи интеграла прибавить къ нему или вычесть какое нибудь постоянное количество, однакожъ, ежели просто требуется взять отъ предложенныхъ въ § 14. дифференцiаловъ инте-

интегралы безъ всякихъ задачь и условій, то они сыскиваются такъ, какъ, тамъ показано. 2) отъ каждаго перемѣннаго количества легко взять дифференціалъ, но не отъ каждаго дифференціала интегралъ. Ибо легко можно безчисленное множество выдумать функцій количества x и къ нимъ приставить dx, а интегралъ ихъ найти весьма трудно, или не возможно. Въ семъ то состоитъ главное упражненіе знаменитыхъ алгебраистовъ чтобъ изъ разныхъ дифференціаловъ находить ихъ интегралы.

§ 16.

Оставляя многіе способы сыскивать интегралы предписанные въ пространныхъ сочиненіяхъ о интегральномъ вычисленіи, каковы суть Г. Ейлера, Сори, Кестнера, Карштена и проч. предложу только одно самое нужнѣйшее т. е. какъ брать интегралъ или сколько можно къ нему подходить ближе отъ такихъ дифференціальныхъ функцій, въ кои входятъ количества разрѣшающіяся на безконечныя строки. Такъ на пр. дабы найти интегралъ формулы $\frac{dx}{1+x}$, должно $\frac{1}{1+x}$ разрѣшить въ безконечную строку и потомъ сколько нибудь членовъ сея строки умноживъ на dx, взять ихъ интегралы обык-

кновеннымъ порядкомъ. Но $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ и проч. по чему $\frac{dx}{1+x} = dx - xdx + x^2dx - x^3dx \ldots$ и проч. а сей строки интегралъ есть $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ и проч. $= \int\frac{dx}{1+x}$. На семъ основанiи всѣхъ подобныхъ дифференцiаловъ интегралы брать можно, какъ то въ послѣдствiи показано будетъ. Такъ же дабы взять $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ должно $\sqrt{(a^2-x^2)}$ по Невтоновой формулѣ разрѣшить въ безконечную строку и каждой членъ умноживъ на dx брать ихъ интегралы, какъ то и учинено въ § 58. Подобно разсуждать должно и о прочихъ разрѣшимыхъ въ безконечныя строки количествахъ. О дифференцiалахъ второй степени см. въ концѣ книги.

О кривыхъ линеяхъ.

§ 1.

Всякому внимательному человѣку не трудно усмотрѣть, что безчисленное есть множество нужныхъ и полезныхъ вещей натурою и искуствомъ производимыхъ, кои имѣютъ видъ криволинейный, однакожъ не круговый, а совсѣмъ особливой кривизны такъ, что по простой Геометрїи его измѣрять и узнавать его свойства нѣтъ способа. Таковъ есть путь планетъ, таковы суть линеи бомбами и ядрами описываемыя, таковы многїя зеркала, своды и проч. Многїя изъ сихъ линей кривизною между собою различныхъ учеными людьми подведены подъ правила и свойства ихъ изъяснены такъ, что чрезъ сїе употребленїе ихъ не только сдѣлалось понятнѣе, но и гораздо пространнѣе и великая часть Физики, Механики, Астрономїи и прочихъ многихъ наукъ на нихъ, какъ на единственномъ основанїи утвердилась. И такъ не льзя не имѣть любопытства узнать свойства сихъ кривыхъ линей и чрезъ то притти въ состоянїе разумѣть ихъ и употреблять. Краткое понятїе о семъ удобно получить можно изъ слѣдующаго сокращенїя *высшей Геометрїи*, подъ которымъ именемъ обыкновенно разумѣется ученїе о кри-

выхъ линеяхъ. *Первая часть* высшей Геометрїи будетъ содержать въ себѣ ученїе о сѣченїяхъ коническихъ; а *вторая* о другихъ кривыхъ линеяхъ, при чемъ показано будетъ и употребленїе описанныхъ линей; а больше о семъ найти можно въ Физикѣ Гиларовскаго.

§ 2.

Изъ пяти разныхъ образовъ разсѣченїя прямаго конуса на двѣ части, одинъ только производитъ въ разрубѣ прямолинейную плоскость, а прочїе всѣ криволинейныя. Отъ сѣченїя по самой оси произходитъ равнобедренный прямолинейный треугольникъ, которымъ и изображается весь конусъ; отъ параллельнаго оси сѣченїя произходитъ кривая линея окружающая разрубъ, которая называется *Иперболою*, отъ параллельнаго боку конуса сѣченїя произходитъ *Парабола*, отъ параллельнаго основанїю *кругъ*, а отъ поперечнаго ни одной вещи изъ вышеозначенныхъ непараллельнаго сѣченїя *Еллипсисъ*. Всѣ сїи кривыя линеи кромѣ круговой разумѣются собственно подъ именемъ *сѣченій коническихъ*, а треугольникъ и кругъ разсматриваются въ простой Геометрїи.

ЧАСТЬ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

§ 3

Свойства сѣченїй коническихъ.

Дабы намъ найти *свойства* сихъ трехъ кривыхъ линей, представимъ мы себѣ 1) три конуса ф 1, 2, 3. изъ коихъ первый параболою, вторый еллипсисомъ, а третїй иперболою пересѣкаются. 2) что каждое изъ сихъ сѣченїй перерѣзывается кругомъ въ линеѣ ihm. 3) что въ срединѣ конуса какъ сквозь каждое изъ оныхъ трехъ сѣченїй, такъ и чрезъ круги ихъ по дїаметрамъ kl проходитъ треугольникъ ABC перпендикуларно. 4) общїй разрѣзъ ih круга и коническаго сѣченїя съ треугольникомъ, къ плоскости треугольника перпендикуларенъ. 5) что ih перпендикуларна къ дїаметру круга kl и къ he Ибо сїи линеи находятся на плоскости треугольника. Зная сїе удобно найти то, чего ищемъ.

§ 4.

Свойство параболы найдется слѣдующимъ образомъ: по причинѣ подобїя треугольниковъ ehl и ecd фиг. 1 будетъ eh hl = de: dc, или положивъ eh = x, ed = 2a, dc = b, x: hl = 2a: b, отсюда $HL = \frac{bx}{2a}$. По томъ проведши чрезъ e параллельную основанїю ef = c; а слѣдственно = bd = kh, (ибо ed парал-

лельна ab по произхожденію параболы) будетъ

$kh \cdot hl = \frac{cbx}{2a}$. Но какъ въ кругѣ квадратъ

перпендикулара ih возставленнаго на діаметрѣ равенъ произведенію отрѣзковъ kh и hl; то

назвавъ ih буквою y, будетъ $y^2 = \frac{cbx}{2a}$. Дабы

не дѣлать всегда для объясненія свойства параболы конуса и не проводить линей dc и ef, кои суть внѣ параболы; то къ тремъ линеямъ ed dc и fe прискиваютъ четвертую пропорціональную, называютъ ее *параметромъ* и

означаютъ буквою p такъ, что $p = \frac{bc}{2a}$, а

$y^2 = px$. Сіе уравненіе изображаетъ свойство параболы.

§ 5.

Чтобъ какъ сіе уравненіе, такъ и прочія слѣдующія словами можно было удобно описывать и безъ фигуръ ясно себѣ представлять; то линеямъ въ оныя входящимъ даны разныя имена, а имянно: линея пересѣкающая по поламъ какія нибудь параллельныя линеи отъ одной точки кривой линеи къ другой проведенныя называется *діаметромъ* кривой линеи; діаметръ пересѣкающій оныя параллельныя линеи подъ прямымъ уг-

ломЪ называется *осью*; самыя параллельныя линеи пересѣкаемыя по поламЪ наименованы ординатами дїаметра или оси, смотря по углу пересѣченїя; половины ихЪ *полуординатами* или *аппликатами*; точка, вЪ коей ось или дїаметрЪ пересѣкаютЪ кривую линею *верхомъ оси или дїаметра*. Двѣ такїя точки опредѣляютЪ длину оси. Часть оси или дїаметра между верхомЪ и аппликатою заключающаяся называется *абсциссою*. Абсцисса обыкновенно означается буквою x, а аппликата буквою y.

§ 6.

ИзЪ сего видно, что вЪ фиг. 1. ed есть ось параболы; ибо она перпендикуларно раздѣляетЪ im на двѣ равныя части вЪ h, за тѣмЪ, что дїаметрЪ kl перпендикуларную хорду всегда раздѣляетЪ по поламЪ. По сему $ih = y$ есть аппликата, а $eh = x$ есть абсцисса параболы и уравненїе изображающее свойство параболы состоитЪ вЪ томЪ, что квадратЪ аппликаты всегда равенЪ произведенїю абсциссы и параметра, или $y^2 = px$.

§ 7.

ИзЪ уравненїя сего слѣдуетЪ: 1) поелику какїя бы мы ни взяли абсциссы и аппликаты вЪ параболѣ, линеи 2a, b и c неперемѣняпся

нятся, какъ видно изъ фиг. I, то $\frac{bc}{2a} = p$ есть количество постоянное. Слѣдственно взявши другую въ параболѣ абсциссу v и соотвѣтствующую ей аппликату z, получимъ $y^2 : z^2 = px : pv$ или $y^2 : z^2 = x : v$ т. е. квадраты аппликатъ параболы содержатся какъ соотвѣтствующія имъ абсциссы, или $z : y = \sqrt{v} : \sqrt{x}$, 2) ежели взявши произвольныя линеи p и x найти къ нимъ среднюю пропорціональную т. е. сложивъ ихъ вмѣстѣ въ одну прямую линею и описавъ изъ средины сей сложной линеи кругъ, возставить изъ точки совокупленія перпендикуларъ до окружности, конецъ его будетъ на параболѣ такъ, что увеличивая x и возставляя новые перпендикулары можно многія найти точки параболы, чрезъ кои проведенная кривая линея и будетъ настоящая парабола; но есть легчайшій и вѣрнѣйшій способъ описывать параболу смотр. §. 17 3) ежели парабола уже описана, удобно найти параметръ взявши произвольную абсциссу и аппликату и нашедши къ нимъ третью пропорціальную линею по простой Геометріи. 4) поелику $y = \pm\sqrt{px}$, то каждой абсциссѣ соотвѣтствуютъ двѣ аппликаты одна положительная, а другая отрицательная т. е. одна въ верхъ, а

другая

другая въ низъ перпендикуларно на оси возставленныя. 5) изъ уравненія $y = \pm\sqrt{px}$ видно, что когда x увеличивается, то увеличивается и y такъ, что не можетъ y быть равнымъ 0, сколько бы x ни былъ великъ. Слѣдовательно кривая линея ни гдѣ въ ту сторону, куда отъ верху берутся абсциссы, съ осью сойтись не можетъ или парабола имѣетъ какъ съ верху, такъ и съ низу двѣ безконечныя отрасли. 6) ежели взять абсциссу отрицательную т. е. представить, что она лежитъ отъ верху не въ ту сторону куда ось идетъ, а въ противную, то выйдетъ $y = \sqrt{-px}$. т. е. y не возможенъ.

§ 8.

Уравненіе для еллипсиса сыщется слѣд. образомъ: Въ фиг. 2 проведши dgи fe параллельно основанію конуса, выйдетъ во первыхъ для подобія треугольниковъ ehl, edg, ed: dg = eh: hl или 2a: b = x: hl, полагая ed = 2a, dg = b, eh = x. Отсюда $hl = \frac{bx}{2a}$. По томъ въ подобныхъ треугольникахъ dkh и dfe, ed: fe = dh: hk или 2a: c = 2a—x: hk, гдѣ fe положено = c. По сему $hk = c\left(\frac{2a-x}{2a}\right)$, а hk. lh = $lh^2 = \frac{bcx}{4a^2}$.

(2a

$(2a-x) = px \frac{(2a-x)}{2a} = px \frac{-pxx}{2a}, = y^2$, полагая

такъ же какъ при параболѣ вмѣсто $\frac{bc}{a}$ параметръ p. И такъ уравненіе для еллипсиса состоитъ въ томъ, что квадратъ аппликаты равенъ произведенію параметра́ и абсциссы безъ произведенія абсциссы на четвертую пропорціальную линею къ оси, параметру и той же абсциссѣ; ибо ed есть ось по § 5.

§ 9.

Изъ уравненія сего прямо слѣдуетъ:

1) что поелику $\frac{bc}{2a}$ есть постояное количество, какая бы абсцисса и аппликата ни взяты были, то взявши другую абсциссу v и аппликату другую z, выйдетъ $z^2 . y^2 = pv - \frac{pv^2}{2a} : px - \frac{px^2}{2a} = 2av - v^2 : 2ax - xx = v(2a-v) : x(2a-x)$ т. е. квадраты аппликатъ содержатся какъ произведенія отрѣзковъ оси 2) когда $x = 2a$ тогда $y = o$ т. е. кривая линея сходится опять съ осью. 3) Положивъ диффе-

ренціалъ

ренцїалЪ у равнымЪ о т. е $d\sqrt{\left(px-\frac{pxx}{2a}\right)}=$

$\frac{pdx-\frac{pxdx}{a}}{2\sqrt{\left(px-\frac{pxx}{2a}\right)}}=o$, или $pdx=\frac{pxdx}{a}$, выйдетЪ $x=a$

т. е. y бываетЪ самый большїй, когда онЪ возставленЪ изЪ средины оси и тогда онЪ $=$

$\sqrt{\frac{ap}{2}}$, поставляя вЪ уравненїи $y^2=px-\frac{pxx}{2a}$

вмѣсто a, x, или $y^2=\frac{ap}{2}$. Сїя то аппликата вЪ срединѣ большой оси возставленная называется *меньшею полуосью*, или удвоена будучи *осью меньшею*. И такЪ назвавЪ сїю

ось $2b$, будетЪ $b^2=\frac{ap}{2}$, или $4b^2=2ap$ т. е. меньшая ось есть средняя пропорцїональная между большею и параметромЪ. 4) поелику

$y=\pm\sqrt{\left(px-\frac{pxx}{2a}\right)}$; то аппликаты еллипсиса для одной абсциссы суть двойныя, одна вЪ верхЪ, а другая вЪ низЪ на оси возставленныя. 5) по даннымЪ тремЪ вещамЪ изЪ четырехЪ

2a,

2a, p, x. у всегда можно найти четвертую и по правиламъ Геометрическимъ состроить.

§ 10.

Остается теперь вывесть уравненіе для иперболы. Продолживъ въ фиг. 3. aB и he до соединенія ихъ въ d и проведши чрезъ d параллельную съ основаніемъ dg, по причинѣ подобія треугольниковъ ehl, edg въ коихъ углы при e вертикальные, а углы g и l на крестъ, получимъ ed: dg = eh hl или положивъ ed = 2a, dg = b, eh = x, 2a: b = x: hl, откуда hl = $\frac{bx}{2a}$. Такъ же въ подобныхъ треугольникахъ dfe и dkh, de: fe = dh: kh или полагая ef = c, 2a: c = 2a+x: kh. По сему kh = $\frac{c(2a+x)}{2a}$, а kh. hl = $lh^2 = y^2 = \frac{bcx(2a+x)}{4a^2}$; а естьли положить какъ и прежде вмѣсто $\frac{bc}{2a}$ четвертую пропорціальную p, то $y^2 = px + \frac{pxx}{2a}$ т. е. квадратъ аппликаты равенъ произведенію абсциссы на параметръ сложенному съ произведеніемъ абсциссы на чет-

четвертую пропорціальную линею къ оси, параметру и тойже абсциссѣ; ибо ed есть ось иперболы по § 11.

§ 11.

Уравненіе сіе показываетъ 1 что ипербола отъ еллипсиса только разнится +, 2) что, поелику $y = \pm\sqrt{\left(px + \frac{pxx}{(2a}\right)}$; то двѣ аппликаты имѣетъ каждая абсцисса, изъ коихъ одна въ верхъ, а другая въ низъ возставлена. 3) что ежели увеличивается x; то увеличивается и y такъ, что ипербола отходитъ безконечно далеко отъ своего верха, какъ выше абсциссъ такъ и ниже. 4) что ежели x положить $= -2a$; то $y = 0$ т. е. ежели продолжимъ линею AB фиг. 6, на которой берутся абсциссы, на $2a$ въ противную сторону отъ верха; то въ другомъ концѣ ея B, $y = 0$ т, е. кривая линея съ нею сойдется и слѣдственно имѣетъ два верха A и B. Ежели же положить $x = -3a$, то $y^2 = -3ap + \frac{9ap}{2} = \frac{3ap}{2}$ или $y = \sqrt{\frac{3ap}{2}}$ т. е. y будетъ положительное количество. Увеличимъ еще x такъ, что онъ $= 4a$; то $y^2 = -4ap + \frac{16ap}{2} = 8ap$ и $y = \sqrt{8ap}$. Сіе показываетъ, что y тѣмъ болѣе становится, чѣмъ болѣе

удаляется

удаляется отъ другой точки В соединенія кривой линеи съ линеею, на коей абсциссы берутся, или что ипербола и отъ другаго своего верха В удаляется безконечно далеко, что абсциссы и аппликаты берутся на продолженной оси въ обѣ стороны и что ипербола имѣетъ такой видъ, какъ въ фиг. 6 представлено. Линея перпендикуларно проходящая чрезъ центръ иперболы с и равная $\sqrt{}$ ар или средняя пропорціональная между большею осью и параметромъ называется меньшею осью 5) что поелику $\frac{bc}{2a} = p$, какія бы абциссы и аппликаты ни взяты были, есть количество постоянное; то взявъ другую абсциссу v, и другую аппликату z, выйдетъ z^2:

$$y^2 = pv + \frac{pu^2}{2a} : px + \frac{px^2}{2a} = v\ (2a+u) : x\ (2a+x)$$ т. е.

квадраты аппликатъ содержатся какъ суммы абсциссъ съ большею осью умноженныя на абсциссы.

Примѣчаніе 1. Зная изъ Геометріи, что перпендикуларъ изъ окружности на діаметръ опущенный равенъ корню произведенія отрѣзковъ діаметра и ясно видя изъ § 5, что сей перпендикуларъ есть аппликата круга, и одинъ изъ отрѣзковъ абсцисса, не трудно по-

но понять, что въ кругѣ $y^2 = 2ax - xx$, полагая дiаметръ $= 2a$.

Примѣчанiе 2. Можно такъ же и въ треугольникѣ прямолинейномъ AFG фиг. 7 на одномъ боку взять какiя нибудь части AC, AE, AG и изъ C, E и G провесть параллельныя съ основанiемъ FG, чтобъ имѣть абсциссы, аппликаты и ихъ содержанiе. Для сего назвавши сторону AG буквою a, FG буквою b, и положивъ AC или AE $= x$, а BC или DE $= y$, удобно усмотрѣть, что по причинѣ параллельнаго положенiя BC и DE съ FG, выйдетъ пропорцiя $x : y = a : b$ и $y = \frac{bx}{a}$. Въ семъ состоитъ уравненiе для прямой линеи.

Примѣчанiе 3. Въ разсужденiи уравненiя Еллипсиса, Иперболы и Круга замѣтить должно, что Математики находятъ иногда въ томъ выгоду, чтобъ не абсциссу называть буквою x, а сумму полуоси и абсциссы въ Иперболѣ и разность ихъ въ двухъ другихъ линеяхъ. Тогда уже абсцисса въ Иперболѣ будетъ $= x - a$, а въ кругѣ и еллипсисѣ $= a - x$. Такъ уравненiе Еллипсиса $y^2 = px - \frac{pxx}{2a}$ будетъ такое: $\frac{p}{2a}$ $(aa - xx)$, въ кругѣ y^2 будетъ $= aa - xx$, а въ

Иперболѣ $y^2 = \frac{p}{2a}$ ($xx - aa$). Выгода сія состоитъ въ томъ, что корни квадратные удобнѣе извлекать изъ суммы квадратовъ $a^2 + x^2$, или изъ разности ихъ $a^2 - x^2$, нежели изъ $2ax \pm xx$.

Примѣчаніе 4. Поелику меньшая ось въ Еллипсисѣ и Иперболѣ $= \sqrt{2ap}$; то положивъ ее $= 2b$, получимъ $4b^2 = 2ap$ и $p = \frac{2b^2}{a}$. По сему уравненіе въ Еллипсисѣ будетъ $y^2 = \frac{2b^2x - b^2xx}{a} \cdot \frac{}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ ($2ax - xx$); а въ Иперболѣ $\frac{b^2}{a^2}$ ($2ax + xx$).

Примѣчаніе 5. Ежели въ Иперболѣ обѣ оси равны между собою; то $y^2 = 2ax + xx$ и такая Иперболa называется равностороннею. Въ ней какъ видно $2a = p = 2b$.

§ 12.

Фокусы.

Точка на оси какого нибудь сѣченія взятая, въ коей аппликата равна половинѣ параметра, называется *фокусомъ*, и имѣетъ нѣкото-

нѣкоторыя особливыя свойства, какъ то послѣ показано будетъ. По сему опредѣленію удобно найти разстояніе фокуса отъ верха сѣченій.

§ 13.

Во первыхъ въ Параболѣ положивъ сїе разстоянїе $= x$, выйдетъ аппликата въ немъ $= \frac{p}{2}$. По сему $\frac{p^2}{4} = px$ или $x = \frac{p}{4}$ т. е. фокусъ F Параболы фиг. 4. отстоитъ отъ ея верха A на $\frac{1}{4}$ параметра.

§ 14.

Во вторыхъ въ Еллипсисѣ, естьли x означаетъ разстоянїе фокуса отъ верха, то $\frac{p^2}{4} = px - \frac{pxx}{2a}$, или $\frac{p}{4} = \frac{2ax - xx}{2a}$; отсюда [$xx - 2ax = -\frac{ap}{2}$; а $x = a \pm \surd(a^2 - \frac{ap}{2})$. Изъ сего видно, что Еллипсисъ имѣетъ два фокуса, изъ коихъ разстоянїе одного отъ верха $= a + \surd(a^2 - \frac{ap}{2})$, а другаго $a - \surd(a^2 - \frac{ap}{2})$. По сему назначивъ два

фокуса фиг. 5 F и f легко усмотрѣть 1) что разстоянїе ихъ самихъ Ff будетъ $2\sqrt{a^2 - \frac{ap}{2}}$ 2) что разстоянїе каждаго фокуса отъ средины $= \sqrt{(a^2 - \frac{ap}{2})}$ 3) что возстановивъ изъ средины оси C перпендикуларъ $CM = \sqrt{\frac{ap}{2}} = b$ смот. § 9 и проведши линею MF или Mf, получимъ $MF^2 = Mf^2 = \frac{ap}{2} + a^2 - \frac{ap}{2}$. По сему $= MF = fM = a$ т. е. линеи изъ фокусовъ проведенныя къ верху меньшей оси равны порознь половинамъ большей оси. На семъ основывается способъ въ данномъ Еллипсисѣ находитъ фокусы. Для сего изъ точки M должно радїусомъ $= a$, описать дугу, то она пресѣчетъ ось въ двухъ фокусахъ F и f.

§ 15.

Въ третьихъ въ разсужденїи Иперболы, не премѣняя значенїя x, выйдетъ $xp + \frac{pxx}{2a} = \frac{p^2}{4}$, $2ax + xx = \frac{ap}{2}$. По чему $x = -a \pm \sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})}$. Отсюда

сюда слѣдуетъ 1) что Ипербола имѣетъ такъ же два фокуса , коихъ разстоянïе отъ какого нибудь верха на пр. A фиг. $6 = -a + \sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})}$. 2) Что ежели въ срединѣ оси возставить перпендикуларъ CZ равный $\sqrt{\frac{ap}{2}}$ смотр. § 11 и провесть линею ZA, то $AZ^2 = \frac{ap}{2} + a^2$, и $AZ = \sqrt{(\frac{ap}{2} + a^2)}$. И такъ ежели радïусомъ AZ изъ C описать Кругъ, то онъ пресѣчетъ продолженную ось въ двухъ точкахъ F и f, кои будутъ фокусы. Ибо одной точки на пр. F разстоянïе отъ верха A будетъ $-a + \sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})} = \sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})} - a$, а другой $= -\sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})} - a$, гдѣ — означаетъ только то, что сей фокусъ на другой сторонѣ отъ верху, или что разстоянïе его $= a + \sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})}$ взятое въ противную сторону. 3) По сему разстоянïе обоихъ фокусовъ $= 2\sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})}$, и каждаго отъ

центра $= \sqrt{(a^2 + \frac{ap}{2})}$.

§ 16.

Радїусы движенїя.

Линея проведенная изъ фокуса къ какой нибудь точкѣ сѣченїя называется радїусомъ движенїя (radius Vector) Радїусъ движенїя FH фиг 4· въ Параболѣ $= \sqrt{(HP^2 + FP^2)} = \sqrt{(y^2 + (x - \frac{p}{4})^2)}$; ибо $FP = x -$ AF. И такъ $FH^2 = px + x^2 - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16} = x^2 + \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16}$ и $FH = x + \frac{1}{4} p$ т. е. равенъ абсциссѣ сложенной съ разстоянїемъ фокуса.

§ 17.

На семъ основывается легчайшїй и вѣрнѣйшїй способъ описывать Параболу. Для сего по данному параметру нашедши разстоянїе фокуса F фиг. 8 отъ произвольно взятаго верха A, поставь перпендикуларно къ AF линейку AZ, утверди ее неподвижно, приложи къ ней плотно линейку HM, къ коей концу H и точкѣ F привяжи нитку длиною равную HM+FA, а по томъ натянувъ нитку каранда-

карандашемъ до A веди линейку MH по AZ такъ, чтобъ карандашъ съ натянутою ниткою всегда подлѣ HM находился; тогда онъ опишетъ дугу параболическую. Ибо сколько бы MH ни отдвинулась отъ RA, всегда часть нитки FD натянутая карандашемъ D равна будетъ MD + AF за тѣмъ, что вся нитка = AF+HM, а часть ее HD лежитъ при линейкѣ. Слѣдовательно FD = AP+AF, ежели PD есть аппликата; а потому FD всегда есть радіусъ движенія, или D находится на Параболѣ.

Примѣчаніе 1. По сему ежели даны двѣ линеи AB и AD фиг. 29, къ коимъ требуется найти двѣ среднія пропорціональныя; то взявши за параметръ AB описать должно параболу AHS, по томъ параметромъ AD описать параболу XAH, изъ точки пересѣченія ихъ H опустить на оси ихъ перпендикуляры HR и KH; то они и будутъ искомыя двѣ среднія пропорціальныя линеи между AB и AD. Ибо по свойству Параболы $RH^2 = AR.AB$, и $KH^2 = AR^2 = RH.AD$. т. е. AB: RH = RH: AR. и RH: AR = AR: AD.

Примѣчаніе 2. Когда требуется удвоить кубъ, или сдѣлать $m^3 = 2a^3$; тогда стоитъ только къ линеямъ 2a и a найти вторую изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ линей, ибо ища между b и c двѣ

 среднія

среднія линеи x и y надобно сдѣлать двѣ пропорціи; $b : x = x : y$ и $x : y = y : c$. Слѣд. $x^2 = by$, и $y^2 = cx$. По сему $c^2 b = y^3$, или полагая $b = 2a$, а $c = a$, получимъ $2a^3 = y^3$, $x^3 = 4a^3$. Изъ сего видно, что искомаго куба бокъ есть вторая изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ линей между 2a и a.

§ 18.

Дабы опредѣлить радіусы движенія FH и fH фиг. 5 въ Еллипсисѣ положимъ, что PH есть аппликата $= y$, $PC = c$, то $AP = a - c$ (ибо ось AB всегда равна 2a). По сему $p \cdot AP - p$

$$\frac{AP^2}{2a} = y^2 = ap - pc - \frac{a^2p + 2acp - c^2p}{2a} = ap - pc - \frac{ap}{2} + cp - \frac{c^2p}{2a} = \frac{ap}{2} - \frac{c^2p}{2a},$$

разстояніе фокусовъ отъ центра $\sqrt{(a^2 - \frac{ap}{2})}$, назовемъ буквою f такъ, что $FC = fC = f$. И такъ $FP = f - c$, а $fP = f + c$, $FP^2 = f^2 - 2fc + c^2$, $FP^2 + PH^2 = FH^2 = f^2 - 2fc + c^2 + \frac{ap}{2} - \frac{c^2p}{2a}$.

Но какъ $f^2 = \frac{2a^2 - ap}{2}$, то $FH^2 = a^2 + c^2 - 2fc - \frac{c^2p}{2a}$.

Вмѣсто $c^2 - \frac{c^2p}{2a}$, можно поставить $c^2 \frac{(2a - p)}{2a} =$

c^2

$c^2\frac{(4a^2-2ap)}{4a^2}=\frac{c^2f^2}{a^2}$ такъ, что $FH^2=a^2-2fc+\frac{c^2f^2}{a^2}$

а $FH=a-\frac{cf}{a}$; что же касается до fH^2; то она

$=fP^2+PH^2$. т. е. $f^2+2fc+c^2+\frac{ap}{2}-\frac{c^2p}{2a}$. Поелику сїе уравненїе тѣмъ разнится отъ уравненїя $f^2-2fc+c^2+\frac{ap}{2}-\frac{c^2p}{2a}$, что во второмъ членѣ вмѣсто $-$ стоитъ $+$; то сдѣлавши въ немъ такую же перемѣну, какъ въ прежнемъ, выйдетъ $fH=a+\frac{fc}{a}$. По сему $FH+Hf=2a$, т. е. въ Еллипсисѣ сумма радїусовъ движенїя всегда равна большой оси. На семъ основывается слѣдующїй способъ описывать Еллипсисъ: взявши произвольную ось AB и фокусы F и f, воткни въ нихъ булавки или гвоздочки и положивъ на нихъ нитку концами связанную, равную AB+Ff, натяни ее карандашемъ и води кругомъ гвоздей, то карандашъ опишетъ Еллипсисъ. Ибо какъ нитка $=$ AB+Ff, то радїусы движенїя вмѣстѣ сложенные всегда будутъ равны AB и по тому точки ихъ соединенїя всегда будутъ на Еллипсисѣ.

§ 19.

По сему можно весьма удобно проводить такія линеи къ даннымъ точкамъ Еллипсиса, кои только бы въ одной точкѣ къ нему прикасались. Должно проведши радіусы движенія FH и fH фиг. 10 продолжить большій изъ нихъ fH столько, чтобъ HN = былъ FH, по томъ чрезъ средину M линеи NF и чрезъ точку H проведенная линея Ty будетъ только одну точку H общую имѣть съ Еллипсисомъ. Ибо какъ треугольникъ NHM = MHF; то Ty къ NF перпендикулярна. По сему отъ всякой точки y на линѣѣ Ty взятой проведенныя линеи къ концамъ NF равны между собою, т. е. Ny = Fy. Но какъ Ny + fy > Nf > 2a, то Fy + yf > 2a, или точка y не находится на Еллипсисѣ.

§ 20.

Изъ сего слѣдуетъ 1) что радіусы движенія въ Еллипсисѣ равные углы составляютъ съ прикасающеюся къ Еллипсису въ точкѣ ихъ соединенія линеею, Ибо уголъ NHM = MHF, но NHM = yHf. Слѣдовательно MHF = yHf. По сему каждое совершенно упругое тѣло брошенное изъ одного фокуса въ дугу Еллипсиса по отраженіи должно отскакивать въ другой фокусъ. Особливо сіе примѣтно на весьма упру-

гихъ

тихъ тѣлахъ, какъ то въ воздухѣ и свѣтѣ.

§ 21.

Такимъ же образомъ какъ въ Еллипсисѣ, сыщутся радіусы движенія Иперболы fH и FH фиг. 6. Ибо положивъ $BA = 2a$, $CP = c$, $CF = Cf = f$, выйдетъ $AP = c - a$, $FP = c - f$, а $fP = c + f$. По чему $P.AP + p$,

$$\frac{AP^2}{2a} = cp - ap + \frac{c^2p - 2acp + a^2p}{2a} = \frac{c^2p}{2a} - \frac{ap}{2} = y^2 = PH^2.$$

Слѣдственно $FH^2 = PH^2 + FP^2 = \frac{c^2p}{2a} - \frac{ap^2}{2} + c - 2cf + f^2$. Но какъ $f^2 = \frac{2a^2 + ap}{2}$, то будетъ $FH^2 = a^2 + \frac{c^2p}{2a} + c^2 - 2cf$. Ежели же въ семъ уравненіи поставить вмѣсто $\frac{c^2p}{2a} + c^2$, $c^2\frac{(p+2a)}{2a}$, или $c^2\frac{(2ap+4a^2)}{4a^2}$, или $\frac{c^2f^2}{a^2}$, получимъ $FH^2 = a^2 - 2cf + \frac{c^2f^2}{a^2}$, а $FH = \frac{cf}{a} - a$, ибо f одинъ больше a. Точно такъ же сыскать можно, что $fH = \frac{cf}{a} + a$. По сему $fH - FH = 2a$ т. е. въ Иперболѣ разность радіусовъ движенія всегда равна большой оси. Сіе свойство Иперболы даетъ способъ ее описывать.

Имѣя

Имѣя данныя двѣ вещи большую ось и параметръ, проведи линею AB равную большей оси, фиг. 9 и продолживъ ее, означь на ней фокусы F и f показаннымъ способомъ въ § 15 и воткни въ нихъ гвоздочки, на гвоздь f надѣнь линѣйку fC скважинкою въ одномъ концѣ ея сдѣланною, къ другому концу линейки C привяжи конецъ нитки, другой же конецъ ея укрѣпи въ F. Длина нитки должна быть равна линейкѣ безъ оси или fC—AB. По томъ натянувъ нитку карандашемъ отдвигай линейку отъ AB около f такъ, чтобъ карандашъ всегда былъ подлѣ линейки, то онъ опишетъ Иперболу. Ибо въ какой бы точкѣ M онъ ни находился, всегда fM—FM будетъ=AB за тѣмъ, что fM+MC—(FM+MC)=AB. И такъ всегда разность радїусовъ движенїя будетъ равна AB.

§ 22.

Точно такъ же и въ Иперболѣ какъ въ Еллипсисѣ проводить можно тангенсъ и доказать, что радїусы движенїя съ тангенсомъ составляютъ равные углы, только для сего не должно продолжать большаго радїуса движенїя fH, а надобно на немъ взять фиг. 6. HN = HF и чрезъ средину M линеи NF провесть линею TH, то она и будетъ прикасаться къ Иперболѣ только въ одной точкѣ H;

H: ибо отъ каждой точки y проведенныя къ концамъ NF линеи yN и yF суть равны между собою, какъ выше доказано, и слѣдовательно вмѣсто yN можно поставить yF. Но $yf - yN < Nf < 2a$. Слѣдовательно $yf - yF < 2a$. По сему y находится не на Иперболѣ и нѣтъ ни одной точки кромѣ N находящейся на Иперболѣ; такъ же уголъ $MHN = FHM$ или $fHM = FHM$.

§ 23.

Ежели изъ центра C Еллипсиса фиг. 10 и Иперболы фиг. 24 провесть линеи къ срединѣ M линеи NF; то сїя линея CM будетъ равна большой полуоси. Ибо какъ $FM = NM$, такъ и $FC = Cf$ и при томъ уголъ F въ обоихъ треугольникахъ FMC и FNf общїй. По чему Nf непремѣнно параллельна MC за тѣмъ, что иначе отрѣзки боковъ не былибы пропорцїональны, и Nf въ двое больше MC; а извѣстно, что $Nf = 2a$. слѣд. $MC = a$.

§ 24.

Субт. и Субнорм.

Линея TH въ фиг. 4, 5 и 6 касающаяся кривыхъ линей въ точкѣ H, а не пресѣкающая оныхъ называется *касательною линеею или тангенсомъ*. Линея TP находящаяся

между

между точкою соединенія T тангенса съ большею осью, и аппликатою HP изъ точки прикосновенія H опущенною называется *субтангенсомъ*. Перпендикуларъ къ тангенсу въ точкѣ прикосновенія H возставленный и на оси оканчивающійся, какъ HL, именуется линеею *нормальною* а между точками соединенія HL и аппликаты HP съ осью, находящаяся линея PL *субнормальною*.

§ 25

Для опредѣленія всѣхъ сихъ линей можно вывесть общее правило слѣдующимъ образомъ: линея AHD фиг. 11. означаетъ какую нибудь кривую линею. TH тангенсъ въ точкѣ H TP субтангенсъ, HK нормальная, PK субнормальная, HP и DL безконечно малое разстояніе имѣющія аппликаты такъ, что какъ HR, такъ и DR суть количества безмѣрно малыя и дуга HD отъ прямой линеи чревычайно мало разнится. И такъ положивъ $AP = x$, $HP = y$, $TP =$ субтангенсу будетъ $PL = HR = dx$, $DR = dy$. Поелику треугольники HDR и THP по причинѣ равенства угловъ P и R, подобны; то $TP. PH = HR: DR$ т. е.

субт: $y = dx: dy$, или субтангенсъ $= \frac{ydx}{dy}$.

Такъ же поелику уголъ $PHR = 90^\circ = KHD$; то вычетши изъ нихъ общій KHR, выйдетъ $PHK = RHD$, а какъ при томъ $P = R$, слѣдуетъ, что треуголь-

угольники HRD и PHK подобны. По сему PK: PH $=$ DR: HR или субнорм: y $=$ dy: dx и субнорм $= \frac{ydy}{dx}$.

§ 26.

Посредствомъ сихъ двухъ уравненій и определенія по свойству кривыхъ линей, чему равно $\frac{ydx}{dy}$, или $\frac{ydy}{dx}$, весьма удобно находить какъ субтангенсы, такъ и субнормальныя. Что же касается до тангенсовъ и нормальныхъ, то зная субтангенсъ или субнормальную и аппликату весьма удобно ихъ определить по Пиѳагоровой теоремѣ.

§ 27.

Во первыхъ въ Параболѣ поелику $y^2 = px$ и $2ydy = pdx$; то $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$ т. е. субнормальная равна половинѣ параметра. Умноживъ дифференціальное уравненіе съ обѣихъ сторонъ на y, будетъ $2y^2dy = pydx$; и $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$ т. е. субтангенсъ всегда равенъ удвоенной абсцис-

абсциссѣ. Слѣдовательно и линея $AT = x$ фиг. 4.

§ 28.

Во вторыхъ въ Еллипсисѣ изъ уравненія $y^2 = px - \frac{pxx}{2a}$ видно, что $4aydy = 2apdx - 2pxdx$ и $\frac{ydy}{dx} = \frac{ap-px}{2a}$. $2ay^2dy = apydx - pxydx$. Отсюда $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap-px} = \frac{2apx - pxx}{ap - px} = \frac{2ax-xx}{a-x}$ По сему AT (фиг. 5) $= \frac{2ax-xx}{a-x} - x = \frac{ax}{a-x}$

§ 29.

въ Иперболѣ изъ уравненія $y^2 = px + \frac{pxx}{2a}$ слѣдуетъ, что $4aydy = 2apdx + 2pxdx$ или $2aydy = apdx + pxdx$, отсюда $\frac{ydy}{dx} = \frac{ap+px}{2a}$; а умноживъ на y прежнее уравненіе, будетъ $2ay^2dy = apydx + pxydx$. Отсюда $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap+px} = \frac{2apx+pxx}{ap+px} = \frac{2ax+xx}{a+x}$. По сему AT (фиг. 6) $= \frac{ax}{a+x}$.

§ 30

§ 3

И такъ субтангенсъ ; и а субнормальная

въ Параболѣ $= 2x$; $= \frac{p}{2}$

въ Еллипсисѣ $= \frac{2ax-xx}{a-x}$; $= \frac{ap-px}{2a}$

въ Иперболѣ $= \frac{2ax+xx}{a+x}$; $= \frac{ap+px}{2a}$

Въ разсужденіи формулъ замѣтить должно, что зная одну для Еллипсиса или Иперболы приисканную легко найти остальную, и для Параболы. формулы для еллипсиса разнятся только отъ иперболическихъ знакомъ —; а для Параболы стоитъ только положить $a = \infty$ (ибо ось въ Параболѣ безконечно велика) и по томъ членъ въ сравненіи съ безконечностію ничего не стоящій истребить. Такъ на пр. $\frac{ap+px}{2a}$ для Параболы

$\frac{\infty p+px}{2\infty} = \frac{\infty p}{2\infty} = \frac{p}{2}$; такъ же $\frac{2ax-xx}{a-x} = \frac{2\infty x-xx}{\infty-x}$

$= 2x$. Что же касается до тангенсовъ и нормальныхъ; то для опредѣленія ихъ знаменованія стоитъ только къ квадрату субтангенса или субнормальной придавать по свой-

ству кривой линеи y^2, какъ то въ фиг. 4, 5 и 6 удобно примѣтить можно.

§ 31.

Отсюда можно вывесть нѣкоторыя слѣдствія въ разсужденіи Параболы. 1) Поелику TF = $x + \frac{1}{4} p$ (фиг. 4) и FH = $x + \frac{1}{4} p$ (по § 16), то треугольникъ THF есть равнобедренный и слѣдственно HTF FHT, или ежели провесть параллельную съ осью линею HM, то уголъ MHZ = THF. По сему ежели въ Параболу ударится какое нибудь совершенно упругое тѣло по линеѣ MH, должно будетъ отразиться въ фокусъ. Ибо тогда уголъ паденія будетъ MHZ, а уголъ отраженія, который всегда бываетъ ему равенъ, FHT, Сіе самое свойство дѣлаетъ зеркала параболическія весьма сильно зажигающими. Ибо всѣ лучи параллельные оси по отраженіи собираются въ фокусѣ и тамъ находящіяся горючія вещи зажигаютъ. По причинѣ сего же самаго свойства параболическая фигура съ великою выгодою употреблена быть можетъ для говорныхъ и слуховыхъ трубъ. Ежели полой съ обѣихъ сторонъ сосудъ dop фиг, 12 имѣетъ такую фигуру, какая должна произойти отъ обращенія полупараболы около своей оси oM и ежели въ узкомъ отверстіи сосуда o находится фокусъ сея Параболы; то онъ изрядную составитъ говорную трубу. Ибо голосъ выходящій изъ

точки

точки o по удареніи объ какую нибудь точку b или c непремѣнно приметъ параллельное оси направленіе bt, ct по тому, что уголъ obr = sbt и слѣдственно звукъ единственно устремится въ направленіи оси и произведетъ большее дѣйствіе, нежели какому, при разсѣяніи его во всѣ стороны, возпослѣдовать бы надлежало. Можно приладить къ сему сосуду другой еллиптической of фиг. 13, котораго одинъ фокусъ въ o, а другой вмѣстѣ съ фокусомъ Параболы въ f такъ, что голосъ изъ o выходящій по отраженіи объ стѣны Еллипсоида въ p и p сгущается въ узкомъ проходѣ f и чрезъ взаимное частицъ воздуха удареніе увеличиваясь послѣ ударяется съ великою силою въ m и m и принимаетъ направленіе такъ же параллельное оси. Сосудъ имѣющій фигуру параболическаго коноида, коего фокусъ находится въ f фиг. 14 съ придѣланнымъ къ нему изкривленнымъ рогомъ fn составляетъ весьма хорошую слуховую трубу. Ибо ежели вложить узкой конецъ n рога въ ухо человѣка мало слышащаго и говорить въ широкое отверстіе, то всѣ параллельно оси падающія частицы воздуха mt, mt по отраженіи отъ вогнутости коноида въ m и m сойдутся въ f, откуда продолжая движеніе по рогу fn приведутъ сгущеніемъ своимъ и взаимнымъ отраженіемъ воздухъ въ

ухѣ находящїйся въ чрезвычайное сотрясенїе, а чрезъ то слабому орудїю слуха великую сдѣлаютъ помощь. Для самаго крѣпкаго уха можно употребить еллиптическую трубу фиг. 15. коея фокусы суть o и f. Изъ o исходящїй голосъ по отраженїи и сгущенїи въ f съ чрезвычайною силою дѣйствовать будетъ на ухо, въ кое узкой конецъ рога вложенъ. 2) По сему удобно проводить тангенсъ къ какой нибудь точкѣ H Параболы фиг. 4. Для сего изъ H опусти перпендикуларъ HP на ось, абсциссу AP продолжи далѣе верха до T такъ, что бы AT = была AP. Тогда изъ T къ H проведенная прямая линея будетъ тангенсъ. Ибо TP будетъ субтангенсъ по опредѣленїю его. Сїе примѣчанїе для Еллипсиса и Иперболы сдѣлано уже при удобнѣйшемъ случаѣ выше.

§ 32.

Опуск. на танг. изъ фокусовъ перпендикулары.

Опускаемые изъ фокусовъ на тангенсы перпендикулары заслуживаютъ особливое вниманїе по своему въ Астрономїи и другихъ наукахъ употребленїю. Въ параболѣ квадратъ сего перпендикулара FK равенъ радїусу движенїя умноженному на $\frac{1}{4}$ параметра, или фиг. 4. $FK = FH. \frac{1}{4} P$. Поелику TFH есть треугольникъ

никъ равнобедренный по пункту 1 § 31; то FK раздѣляетъ основанїе TH по поламъ. По сему

$KH^2 = \frac{1}{4} TH^2 = \frac{1}{4} (4x^2+px) = x^2+\frac{px}{4}$ по § 30,

а вычтено будучи изъ $FH^2 = \frac{(x+p)^2}{4}$ даетъ $FK^2 =$

$\frac{px}{4}+\frac{p^2}{16} = \frac{p}{4} (\frac{p+x}{4})$. Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляры изъ фокуса параболы на тангенсъ опускаемые пропорцїональны корнямъ квадратнымъ радїусовъ движенїя. Ибо $FK^2 =$

$\frac{p}{4} (\frac{p+x}{4})$, а p есть количество постоянное.

По сему $FK = \sqrt{(\frac{p+x}{4})} = \sqrt{FH}$.

§ 33.

Ежели изъ центра C Еллипсиса фиг. 10 и Иперболы фиг. 24 радїусомъ равнымъ полуоси AC описать кругъ; то концы m и d перпендикуларовъ изъ фокусовъ на тангенсъ опущенныхъ fd и FM будутъ находиться на его окружности. Поелику MZ параллельна Nf, какъ доказано въ § 21 и MF упадая подъ прямымъ угломъ на тангенсъ, къ которому перпендикуларна fd, непремѣнно ей параллельна. И такъ MNfZ есть

 па-

параллелограмЪ и $Nf = 2a = Mz$ смот. § 19. По сему Mz есть дїаметрЪ описаннаго круга, а какЪ уголЪ Mdz есть прямой, то стоящїй на дїаметрѣ концами боковЪ треугольникЪ Mdz прямоугольный при d, какЪ верхЪ свой d такЪ и концы M и z имѣетЪ на окружности онаго круга, что извѣстно изЪ простой Геометрїи. Отсюда не трудно вывести, что произведенїе перпендикуляровЪ FM и fd всегда равно квадрату меньшей полуоси. Ибо по свойству круга произведенїя отрѣзковЪ хордЪ всегда равны между собою т. е. $df. fz = Af. fB$. И такЪ назвавши разстоянїе фокуса отЪ центра $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ буквою c, выйдетЪ $Af = a+c$, а $fB = a - c$ и $Af. fB = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 + b^2 = b^2$. Слѣдовательно $df. fz = df. NM = df. FM = b^2$. Что же касается до Иперболы фиг. 24. $fB : fd = fz : fA$ по свойству линей изЪ внѣ пересѣкающихЪ кругЪ, или $fB. fA = fd. fz = fd. FM$ и какЪ $fB. fA$,

полагая $cf = cF = \sqrt{(a^2 \frac{ap}{2})}$ равна c, будетЪ

$= (a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = \frac{ap}{2} = b^2$ по § 11 пункт. 4; слѣдовательно $fd. FM = b^2$.

§ 34.

Перпендикуляры изЪ фокусовЪ Еллипсиса

и

и Иперболы на тангенсы опущенные въ разныхъ точкахъ сихъ кривыхъ линей растутъ въ Еллипсисѣ болѣе, а въ Иперболѣ менѣе, нежели квадратные корни радїусовъ движенїя: въ Еллипсисѣ фиг. 10 треугольники FMH и fHd по причинѣ равныхъ угловъ при тангенсѣ по § 20 пункту 1 и прямыхъ въ M и d подобны такъ, что FM: FH = fd: fH и $FM = \frac{FH.\ fd}{fH}$. Отсюда $FM^2 = \frac{FM.\ FH.\ fd}{fH} = \frac{b^2.\ FH}{fH}$ за тѣмъ, что по § 33 FM. fd $= b^2$. По сему называя FM буквою P, а перпендикуляръ для другаго тангенса изъ F же буквою Q, коего радїусы движенїя, меньшїй есть FH^I а большїй fH^I, $P^2 : Q^2 = \frac{FH}{fH} : \frac{FH^I}{fH^I}$, или $P : Q = \sqrt{\frac{FH}{fH}} : \sqrt{\frac{FH^I}{fH^I}}$. Точно такимъ же образомъ въ Иперболѣ фиг: 24 изъ подобныхъ треугольниковъ FHM и fHd, по тѣмъ же причинамъ, какъ и при Еллипсисѣ получимъ точно такую же пропорцїю. Разность въ разсужденїи сихъ двухъ кривыхъ линей состоитъ въ томъ, что дробь $\frac{FH}{fH}$ въ Еллипсисѣ при увеличиванїи FH болѣе увеличивается, нежели какъ, когдабы fH была постоянная величина, ибо FH + fH = 2a, а по тому при увеличиванїи FH непремѣнно уменьшается fH, дабы

сумма была $=2a$, а чрезъ то дробь двоякимъ образомъ увеличивается: т. е. чрезъ увеличенїе числителя и уменьшенїе знаменателя за перьвымъ неминуемо слѣдующее. На противъ сего въ Иперболѣ при увеличенїи FH увеличивается и fH, дабы $fH - FH$ было $=2a$; слѣдственно дробь менѣе увеличивается, нежели при постоянномъ знаменателѣ; ибо увеличенїе знаменателя уменьшаетъ дробь. Отсюда слѣдуетъ, что въ Еллипсисѣ $P^2 : Q^2 > FH : FH^I$, въ Иперболѣ же $P^2 : Q^2 < FH : FH^I$ т. е. ежели FH будетъ въ двое больше FH^I, P^2 будетъ превозходить Q^2 больше нежели въ двое въ Еллипсисѣ, менѣе, нежели въ двое въ Иперболѣ. Сїе можно означать кратко такъ: $P > \sqrt{FH}$ въ Еллипсисѣ, а въ Иперболѣ $P < \sqrt{FH}$, разумѣя подъ знаками $>$ и $<$ превозходство или недостатокъ въ пропорцїональности.

§ 35.

Асимптоты.

Прямая линея непрестанно приближающаяся къ кривой и никогда съ нею не сходящаяся, называется ея *асимптотомъ.* Дабы опредѣлить въ сѣченїяхъ коническихъ асимптоты, на передъ должно опредѣлить перпендикулярную къ оси при самомъ верхѣ сѣченїя линею AS

фиг.

фиг. 4. 5. 6. простирающуюся только до тангенса. Поелику Δ ки TAS и TPH подобны между собою; то TA: AS = TP: PH; Отсюда

AS 1) для Параболы $= \frac{x\sqrt{px}}{2x} = \frac{\sqrt{px}}{2} = \frac{y}{2}$, 2)

для Еллипсиса $= \frac{a}{2a-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{px - pxx}{2a}\right)} = \frac{ay}{2a-x}$ 3)

для Иперболы $= \frac{a}{2a+x} \cdot \frac{\sqrt{px + pxx}}{2a} = \frac{ay}{2a+x}$:

§ 36.

Нашедши знаменованія AT и AS, удобно можно проводить касательныя линеи, коихъ абсциссы извѣстны, а слѣдовательно и асимптоты. Для сего положивъ въ уравненіи AT, $x = \infty$ за тѣмъ, что разстояніе отъ верху оси, въ коемъ асимптотъ сходится съ кривою есть безконечно велико, выйдетъ 1) для Параболы AT $= \infty$ и слѣд. асимптотъ параболы сходится съ осью въ безконечно великомъ разстояніи отъ верха параболы, или онъ со всѣмъ не возможенъ, 2) Для Еллипсиса AT $= \frac{a\infty}{-\infty} = -a$, а 3) Для Иперболы AT $= a$.

Далѣе AS для Еллипсиса $= \frac{a.}{-\infty} \sqrt{\frac{-p\infty^2}{2a}}$ и слѣдовательно не возможенъ. Что же принадле-

житъ до Иперболы, то въ ней AS =

$$= \frac{a.}{\infty} \sqrt{\left(\frac{p\infty^2}{2a}\right)} = \pm \sqrt{\left(\frac{ap}{2}\right)}.$$

§ 37.

По сему дабы провесть асимптотъ къ Иперболѣ, стоитъ только взять AT = a и AS = b = половинѣ меньшой оси, или изъ центра Иперболы провесть линею чрезъ верхъ меньшей полуоси перпендикуларно на концѣ большой оси въ A стоящей; то она будетъ асимптотъ.

§ 38.

Такъ же естьли въ A возставить меньшую полуось въ низъ перпендикуларно и чрезъ ее провесть изъ центра линею; она будетъ асимптотъ: ибо $AS = \pm \sqrt{\left(\frac{ap.}{2}\right)}$.

Само по себѣ видно, что ежели и на другомъ концѣ оси B возставится $AS = \sqrt{\left(\frac{ap}{2}\right)}$, какъ въ верьхъ, такъ и въ внизъ и изъ центра проведутся чрезъ верьхи ихъ линеи, то они и будутъ асимптоты. Ибо обѣ отрасли Иперболы совершенно равны между собою такъ, какъ ихъ абсциссы въ равномъ разстоянiи отъ центра находящiяся, а слѣдств. и асимптоты имъ соотвѣтствующiя.

§ 39.

§ 39.

Линеи заключающїяся между асимптотами Cq и Cz фиг. 16 и Иперболою, а при томЪ параллельныя которой нибудь оси или одному изЪ асимптотовЪ называются ординатами асимптотовЪ. Таковы суть KZ, Ky. Nq Kq.

§ 40.

Свойства асимптотовЪ Иперболы заключаются вЪ слѣдующихЪ пунктахЪ: a) Произведенїе аппликатЪ KZ, Kq, кои параллельны меньшей оси MS равно квадрату ея половины $KZ.Kq = CM^2 = b^2$. ВЪ подобныхЪ ΔкахЪ, CAT, CPZ $CA : AT = CP : PZ$ или $a : b = a + x$ $\left(\frac{a+x}{a}\right) b = PZ$. Отсюда вычетши $PK = y$, выйдетЪ $KZ = \left(\frac{a+b}{a}\right) b - y$, и какЪ $Pq = Pz$ по причинѣ равенства треугольниковЪ CPZ, CPq подобныхЪ равнымЪ ΔмЪ CAT, CAX, то Kq будетЪ $= \left(\frac{a+x}{a}\right) b + y$. По сему $KZ.\ Kq = b^2.$ $\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - y^2$. Но какЪ $y^2 = px + \frac{pxx}{2a} = \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2xx}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}\ (2ax + xx)$: то $KZ.\ Kq = \frac{b^2}{a^2}\ \left((a+x)^2 - 2ax - xx\right) = b^2$. b) Поелику $KZ = \frac{b^2}{Kq}$ и при

томЪ

томъ Kq становится тѣмъ больше, чѣмъ далѣе она отъ верха Иперболы: то Kz тѣмъ становится меньше и слѣдов. тѣмъ асимптотъ ближе подходитъ къ Иперболѣ.

c) Kz не можетъ никогда быть равна 0. Ибо иначе KZ. Kq и $\frac{b^2}{a^2}((a+x)^2 - 2ax - xx)$ было бы равно 0, а слѣдов. $(a+x)^2$ былъ бы равенъ $2ax + xx$, что совершенно не возможно. И такъ CZ, хотя отъ часу ближе подходитъ къ Иперболѣ, но никогда съ нею не сходится.

d) Произведенiе аппликаты Ky параллельной асимптоту Cq на свою абсциссу Cy = CO. AC. Поелику SA по причинѣ равенства треугольниковъ ACS и ACX равна и параллельна CX, то она параллельна Ky, а слѣд. уголъ KyZ равенъ AOT и уголъ KZy = ATO такъ, что Δ ки KZy и ATO между собою подобны и Ky: KZ = OA: AT или Ky: OA = KZ: AT = b: Kq (смотри пунктъ a). Далѣе поелику треугольникъ Kfq подобенъ ATO по той причинѣ, что Kf проведена параллельно OT, Kq параллельна AT и Fq параллельна OA; то AT: TO = Kq: Kf, или AT: Kq = TO: Kf = b: Kq. Слѣдовательно Ky: OA = TO: Kf и Ky. Kf = OA. TO. Но какъ Kf = Cy и OA = TO = CO по причинѣ равенства треугольниковъ OAT съ OCS и OST съ OCA, то yK. Cy = CO^2, или положивъ Cy = x, yK = y, CO = c, $yx = c^2$.

e)

e) Въ прямоугольномъ треугольникѣ TAS, $AS^2 = a^2 + b^2$, а $OA^2 = OC^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = c^2$. Сія то самая величина c^2 называется *степенью* Иперболы и всегда равна четверти суммы квадратовъ обѣихъ полуосей.

f) Какимъ бы образомъ отъ одного асимптота ни проведена была прямая линея rR фиг. 17. чрезъ Иперболу, всегда ея отрѣзки rn и OR равны между собою. Ибо проведши перпендикуларныя къ оси CP линеи ZH и VQ чрезъ точки n и O, можно удобно усмотрѣть, что по причинѣ параллельнаго положенія линей Zn и QV треугольники rZn и rQO между собою подобны такъ, что $rn : nZ = rO : oQ$. Такъ же въ подобныхъ треугольникахъ Rov и RnH будетъ $Rn : nH = RO : Ov$. Теперь умноживъ члены обѣихъ пропорцій по порядку такъ, чтобы $rn . Rn : nZ . nH = rO . Ro : Qo . Ov$ и поставивъ вмѣсто $Zn . nH = oQ . Ov$ количество имъ равное (по пункту a) b^2, получимъ $rn . Rn = ro . Ro$, или $rn\ (no + Ro) = Ro\ (rn + no)$, или $rn . no + rn . RO = RO . rn + RO . no$ Отсюда $rn . no = Ro . no$ или $rn = Ro$.

g) Касательная линея mt между асимптотами содержащаяся раздѣляется въ точнѣ прикосновенія d на равныя части md и dt. Ибо сія линея въ одной только точкѣ d касается Иперболы и слѣдовательно раз-

стоя-

стоянïе точекъ пресѣченïя n и o (какъ въ пунктѣ f) равно нулю. По сему вмѣсто rn принять должно md, а вмѣсто OR, dt.

h) Произведенïя линей rn, nR и xp, py заключающихся между асимптотами и параллельныхъ тангенсу mt равны квадрату md или t^2. Въ треугольникахъ rnZ и XpQ по причинѣ параллельнаго положенïя линей xp, rn и Qp, Zn подобныхъ, Zn: Qp = rn: xp Такъ же въ треугольникахъ pvy и nHR по вышеозначенной причинѣ подобныхъ nH: pv = nR: py. Ежели члены сихъ пропорцïй по порядку умножить такъ, чтобы Zn. nH: Qp. pV = rn. nR: xp. py и поставить вмѣсто Zn. nH = Qp pv количество имъ равное (по пункту a) b^2. то выйдетъ rn. nR = xp. py. Естьли же точка n упадетъ на d, или rR сдѣлается касательною линеею въ d, то xp. py будетъ = md. dt = t^2.

§ 41.

Дïаметры.

Дïаметръ параболы есть всякая прямая линея параллельная оси. Ибо она всѣ линеи параллельныя тангенсу въ точкѣ ея прикосновенïя къ Параболѣ раздѣляетъ по поламъ. такъ на пр. FL фиг. 18 параллельная оси Параболы AG раздѣляетъ всякую линею HM параллельную тангенсу AF къ точкѣ F,

въ

въ коей FL касается Параболѣ на двѣ равныя части HK и KM. Дабы сіе утвердить, должно во первыхъ положивъ $AB = FK = ES = m$, $KL = SG = n$, а абсциссу $CE = x$, аппликату $FE = KS = y$, опредѣлить MG по абсциссѣ CG равной $x + m + n$. По сему $MG^2 = px + pm + pn$, означая буквою p параметръ. Во вторыхъ въ подобныхъ треугольникахъ BKS и BMG изъ пропорціи $BS^2 : SK^2 = BG^2 : GM^2$, или $4x^2 : px = (2x + n)^2 : px + pm + pn$ (ибо BS = субтангенсу ACE) опредѣлится $n^2 = 4mx$. Въ третьихъ ежели линею DS назвать буквою q, а прочія всѣ оставить при своихъ названіяхъ такъ, что BD будетъ $= 2x - q$, а $CD = x - q + m$ (ибо $AC = x$, а $BC = x - m$); то удобно будетъ усмотрѣть, что $HD^2 = px - pq + pm$, и что въ подобныхъ Δкахъ BHD и BKS изъ пропорціи $BD^2 : DH^2 = BS^2 : KS^2$ или $(2x - q)^2 : px - pq + pm = 4x^2 : px$, выйдетъ $q^2 = 4mx$. Послѣ сего уже будетъ очевидно, что $DS = SG$, а какъ $DS : GS = HK : KM$; то $HK = KM$.

§ 42.

Поелику треугольникъ BKS подобенъ KML такъ, что $BS^2 : KS^2 = KL^2 : ML^2$, или $4x^2 : px = 4mx : ML^2$ и $ML^2 = pm$; KM^2 будетъ $= pm + 4mx = (p + 4x)\,m = (p + 4x)\,FK$. Въ семъ то состоитъ *уравненіе для діаметра* Параболы. То есть линея $KM = \frac{1}{2}HM$ пресѣкаемой діаметромъ

тромъ называется *аппликатою дiаметра*, а часть его FK между его верхомъ F и аппликатою содержащаяся *абсциссою* и квадратъ аппликаты равенъ абсциссѣ умноженной на сумму параметра оси съ четверною ея абсциссою. Сiя сумма называется *параметромъ дiаметра*. Можно вывесть, что квадратъ сей аппликаты равенъ абсциссѣ умноженной на радiусъ движенiя взятый въ четверо. Ибо положивъ радiусъ движенiя $= r = x + \frac{1}{4} p$ получимъ $4r = 4x + p$ и $y^2 = 4r.\ FK$.

§ 43.

Въ Еллипсисѣ дiаметръ есть линея отъ одной точки окружности до другой чрезъ центръ проведенная. Ибо сiя линея раздѣляетъ по поламъ всякую параллельную тангенсу къ точкѣ ея прикосновенiя. Такъ линея NR фиг. 19 есть дiаметръ раздѣляющiй KP параллельную тангенсу AN по поламъ въ O. Для удобнѣйшаго сея истинны уразумѣнiя, назовемъ линеи буквами, или положимъ $CE = x$, $CH = a$, $EH = a - x = b$,

$NE = y$, $CF = d$, $MQ = g$, $AE = \text{subtg} = \frac{c}{b}$ такъ, что $2ax - xx = c$. Теперь дабы опредѣлить, какъ выше въ Параболѣ, аппликаты PG и KD, должно на передъ найти CD и CG. И такъ въ треугольникахъ NEH и OFH подобныхъ

NE:

NE: EH = OF: FH или y: b = d: FH и FH = $\frac{bd}{y}$. Такъ же въ треугольникахъ ANE и KOL подобныхъ по причинѣ равенства угловъ K и A, L и E, AE: EN = KL: LO или $\frac{c}{b}$: y = KL: g и KL = $\frac{cg}{by}$. По сему DH = KL + FH = $\frac{bd}{y} + \frac{cg}{by} = \frac{b^2d+cg}{by}$, CD = $\frac{aby - b^2d - cg}{by}$, a Df = $\frac{aby+b^2d+cg}{by}$. Слѣд. CD.Df = $\frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - 2b^2cdg - c^2g^2}{b^2y^2}$. По сему легко уразумѣть, что KD^2: y^2 = $\frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - 2b^2cdg - c^2g^2}{b^2y^2}$: c и KD^2 = $\frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - 2b^2cdg - c^2g^2}{b^2c}$. Но какъ KD^2 = d^2 — 2dg + g^2; то выходитъ, между сими двумя знаменованіями KD^2 уравненіе, изъ котораго g^2 выходитъ = $\frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - cb^2d^2}{cb^2 + c^2}$. Теперь ежели назовемъ PQ буквою s и оставивъ всѣ прочія линеи при своихъ названіяхъ, будемъ искать PS, то прежде сыщемъ, помощію пропорціи, въ подобныхъ треугольникахъ OPQ и NEA, что OQ = $\frac{AE.PQ}{NE} = \frac{cs}{by}$, SH = FH — OQ = $\frac{bd}{y} - \frac{cs}{by}$,

 CS =

$CS = a - \frac{b^2d + cs}{by}$; a $Sf = a + \frac{b^2d - cs}{by}$. Слѣдовательно $CS . Sf = \frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 + 2b^2dcs - c^2s^2}{b^2y^2}$ и $y^2 : c = PS^2 . \frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 + 2b^2dcs - c^2s^2}{b^2y^2}$. Отсюда $PS^2 = \frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 + 2b^2dcs - c^2s^2}{b^2c}$. Но какъ $PS^2 = d^2 + 2ds + s^2$; то выйдетъ между сими двумя значенїями PS^2 уравненїе, изъ котораго найдется, что s^2 точно тому же равенъ, чему и g^2. Слѣдов. $s = g$, или $MQ = PQ$; но $MQ : PQ = KO : OP$ Слѣдов. $KO = OP$.

§ 44.

Дїаметръ параллельный аппликатѣ другаго называется *сопряженнымъ*. Такъ на пр. FG есть сопряженный дїаметръ NR фиг. 20. Естьли изъ конца F сопряженнаго дїаметра FG опустить на ось перпендикуларъ FH; то часть оси DH будетъ средняя пропорцїональная между субтангенсомъ и разностью полуоси и абсциссы. Для доказательства сего предложенїя должно сдѣлать пропорцїю $KC . KE : CH . HE = KN^2 : HF^2$. Потомъ назвши KD букаввою q, получимъ $x = a - q$ и слѣд. субтангенсъ $\frac{2ax - xx}{a - x}$ будетъ

равенъ

равенъ $\frac{a^2-q^2}{q}$, а для краткости $=t$ такъ, что $a^2=qt+q^2$; такъ же положивъ $DH=u$, выйдетъ $CH.\ HE=a^2-u^2=qt+q^2-u^2$. Замѣтивъ сїе не трудно понять, что пропорцїя $CK.\ KE : CH.\ HE = KN^2 : HF^2$ превратится въ слѣдующую: $qt : qt+q^2-u^2 = y^2 : HF^2$. Откуда $HF^2 = y^2 . \frac{(qt+q^2-u^2)}{qt}$. Далѣе въ треугольникахъ NKA и HDF по причинѣ равенства угловъ A и FDH, K и H, подобныхъ $AK^2 : KN^2 = HD^2 : FH^2$ или $t^2 : y^2 = u^2 : FH^2$. Отсюда $u^2 = t^2 \left(\frac{qt+q^2-u^2}{q}\right)$ и $(q+t) . u^2 = (q+t)\ qt$, или $u^2 = qt = CK.\ KE = a^2-q^2$, или HD есть такъ же средняя пропорцїональная между абсциссами CK. KE.

§ 45.

Поелику квадратъ меньшей оси Еллипсиса равенъ большой оси умноженной на параметръ по 3 му пункту § 9; то въ уравненїи $FH^2 = pCH - p . \frac{CH^2}{2a} = \frac{p.}{2a}(a^2-u^2)$, положивъ абсциссу CH равную $a-u$ и поставивъ меньшую ось вмѣсто параметра, получимъ $FH^2 =$

$\frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - u^2) = (qt + q^2 - u^2)\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2 b^2}{a^2}$ по § 44

(ибо $u^2 = qt$). По сему $FH = \frac{b.q}{a}$, или называя

FH буквою z, $az = bq$. Естьли изъ центра D опустить на тангенсъ перпендикуларъ Dy и провесть FZ параллельную ND; то въ треугольникахъ ADy и HDF по причинѣ равенства угловъ A и D, H и y, подобныхъ, AD: Dy = FD: FH, или t+q равное $\frac{a^2 - q^2}{q} + q =$

$\frac{a^2}{q}$: yD = FD: z. Отсюда yD. FD $= \frac{a^2 z}{q} = ab$,

поставивъ вмѣсто az, bq. И такъ параллелограммъ FDNZ сдѣланный изъ полудіаметровъ равенъ прямоугольнику изъ полуосей.

§ 46.

Чтобъ найти содержаніе между абсциссами и аппликатами діаметровъ въ Еллипсисѣ, такъ какъ нашли въ Параболѣ въ фиг. 20, проведемъ линеи QP, PL и LM, назовемъ DM = n, PL = m, а прочія линеи оставимъ при своихъ названіяхъ. По томъ равенство угловъ PLO и NAK и прямыхъ OPL и AKN дѣлаетъ треугольники OPL и ANK подобными такъ, что NK: AK

$AK = OP : PL$ или $y : t = OP : m$ и $OP = \frac{my}{t}$. Въ подобныхъ треугольникахъ NDK и LMD, $KD : NK = MD : ML$ или $q : y = n : ML$ и $ML = \frac{ny}{q}$. Отсюда $OQ = ML - OP = \frac{ny}{q} - \frac{my}{t}$. Поелику $QD = m + n$; то CQ будетъ $= a - m - n$, а $QE = a + m + n$, и $CQ \cdot QE = a^2 - m^2 - 2mn - n^2$. Теперь изъ пропорціи $CQ \cdot QE : CK \cdot KE = OQ^2 \cdot KN^2$ или $a^2 - m^2 - 2mn - n^2 : qt = \left(\frac{ny}{q} - \frac{my}{t}\right)^2 : y^2$, можно сыскать m^2. Ибо въ квадратѣ $\frac{ny}{q} - \frac{my}{t}$ будетъ во всѣхъ членахъ находиться y^2 такъ, что на y^2 третій и четвертый членъ раздѣлятся и выйдетъ слѣд. уравненіе $\frac{n^2}{q^2} - \frac{2nm + m^2}{qt\ \ q^2} = \frac{a^2 - m^2 - 2mn - n^2}{qt}$, въ коемъ истребивши $-\frac{2mn}{qt}$ останется $\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{a^2 - m^2 - n^2}{qt}$, или $\frac{n^2 + q^2 m^2}{t^2} = \frac{a^2 q^2 - m^2 q^2 - n^2 q^2}{qt}$. Посему $\frac{q^3 m^2}{t}$ будетъ $= a^2 q^2 - m^2 q^2 - n^2 q^2 - qtn^2 = \frac{q^4 m^2}{tq}$. Теперь поставивъ вмѣсто qt

 a^2

a^2-q^2, выйдетъ $q^4m^2 = (a^2-q^2)(a^2q^2-m^2q^2-a^2n^2)$. Отсюда сдѣлавъ умноженіе и истребивъ съ обѣихъ сторонъ равныя количества удобно найти, что $m^2 = a^2+n^2-q^2-\frac{a^2n^2}{q^2}$. Естьли положимъ ND $= l$, FD $= r$; то изъ подобныхъ треугольниковъ NKD и LMD получимъ, KD: ND $=$ MD: LD или $q : l = n$: LD и LD $= \frac{ln}{q}$. По сему NL $= l - \frac{ln}{q}$; LR $= l + \frac{ln}{q}$, а NL. LR $= l^2 - \frac{l^2n^2}{q^2}$. Ежели NL. LR умножить на a^2-q^2, а найденную величину m^2 на l^2; то выйдутъ равныя произведенія такъ, что NL. LR. HD^2 будетъ равно PL^2. ND^2 и PL^2. HD^2 $=$ NL. LR: ND^2. Но какъ по причинѣ подобія треугольниковъ FLO, HDF въ коихъ уголъ PLO $=$ HDF (за тѣмъ, что NLO $=$ NDF, а NLP $=$ NDH) PL^2: HD^2 $=$ OL^2: FD^2 $=$ NL. LR: ND^2 и OL^2 $= \frac{\text{NL. LR } r^2}{l^2}$. И такъ квадратъ аппликаты LO содержится къ квадрату полудіаметра сопряженнаго FD, какъ произведеніе отрѣзковъ NL, LR, простаго діаметра къ квадрату его половины ND. Для краткости положивъ OL $= y$, NL $= x$, выйдетъ $y^2 = \left(\frac{2lx - x^2}{l}\right)$
r^2

$r^2 = \frac{2r^2x}{l} - \frac{r^2 \cdot x^2}{l^2} = sx - \frac{sxx}{2l}$, называя величину $\frac{2r^2}{l}$ буквою s. Отсюда видно, что содержанiе аппликатЪ и абсциссЪ при дiаметрѢ то же, что и при оси, только параметрЪ есть третья пропорцiональная кЪ сопряженному дiаметру и простому. Зная сiе не трудно понять, что при одинакихЪ дiаметрахЪ величина $\frac{r^2}{l^2}$ есть постоянная, и что квадраты аппликатЪ содержатся, какЪ произведенiя отрѢзковЪ дiаметра.

§ 47.

ДiаметрЪ Иперболы есть линея проходящая чрезЪ центрЪ отЪ одной отрасли Иперболы до другой. ТакЪ на пр. NR фиг. 26 есть дiаметрЪ раздѢляющiй каждую линею KP параллельную тангенсу AN по поламЪ. Дабы избѢжать скучнаго разысканiя всѢхЪ линей нужныхЪ для доказательства сея истинны, назвалЪ я вЪ фигурѢ 26 всѣ линеи тѢми же точно буквами, какими и вЪ ЕллипсисѢ фиг. 19 онѢ названы, такЪ, что каждому уразумѢвшему сказанное вЪ параграф. 43 самому собою вывесть можно для Иперболы то же, что выведено для Еллипсиса.

Разность только будетъ въ томъ, что гдѣ при Еллипсисѣ стоитъ—, тамъ въ Иперболѣ будетъ + такъ напр. FH въ Иперболѣ будетъ $= \frac{bd}{y}$ и KL $= \frac{cg}{by}$. Но DH не будетъ $=$ KL + FH, а будетъ $=$ FH — KL и т. д. какъ то удобно понять изъ фиг. прилагая къ ней все сказанное въ 43 параграфѣ и не забывая того, что въ Иперболѣ $y^2 = px + \frac{pxx}{2a}$, субтангенсъ $\frac{2ax+xx}{a+x}$ и содержанія аппликатъ.

§ 48.

Въ Иперболѣ сопряженный діаметръ есть линея такъ же параллельная тангенсу въ точкѣ прикосновенія другаго діаметра, проходящая чрезъ центръ Иперболы и опредѣляемая съ обѣихъ сторонъ проведенными изъ точки прикосновенія параллельными обѣимъ асимптотамъ линеями Такъ въ фиг. 21 hH есть сопряженный діаметръ діаметра dD. Ибо hH параллельна тангенсу LP и ограничена линеями DH и Dh параллельными асимптотамъ CP и CQ. Параллелограммъ сопряженныхъ діаметровъ равенъ прямоугольнику осей. Истинну сего удобно понять, представивъ себѣ, что фиг. 21 CK $=$ AK и Cu. uD $=$ CK AK по пункту d §40 и слѣдов. CK: Cu

Cu = uD: AK. Почему равные углы K и u (по причинѣ параллельныхъ AK и uD, кои обѣ параллельны асимптоту CQ) въ треугольникахъ CAK, cuD, заключаются между боками, коихъ произведенія равны между собою. Но ежели изъ A и D опустить перпендикулары AT и Dt на асимптотъ CP, треугольники TAK и tDu будутъ имѣть кромѣ прямыхъ въ T и t, еще равные вышеупомянутые K и u, а по сему будутъ подобны такъ, что uD: AK = Dt: AT. И такъ Dt: AT = CK: Cu и Dt. Cu = AT. CK. По сей причинѣ треугольникъ CAK = треуг. Cud = CDf. Отсюда въ двое большій CAK тр. CAy = въ двое большему CDf тр. CDL. (ибо Cf: fL = DP: LD, а LD = DP по пункту g § 40. По чему Cf = fl). Изъ сего явно слѣдуетъ, что XCAy = 2CAy = CHDL = 2CDL, или ректангулъ полуосей равенъ параллелограмму полудіаметровъ. Сл. и прямоугольникъ изъ осей всегда равенъ параллелограмму изъ діаметровъ.

§ 49.

Въ заключеніе сей статьи о діаметрахъ замѣтить можно, что каждый діаметръ какъ въ Еллипсисѣ, такъ и въ Иперболѣ параллельный тангенсу разсѣкаетъ большій радіусъ движенія къ точкѣ прикосновенія проведенный такъ, что часть его между

точкою прикосновенїя и пресѣченїя равна бываетъ полуоси. Такъ въ фигурѣ 22 дїаметръ Hh параллельный TM пресѣкаетъ Mf такъ, что $DM = a$. Доказ. естьли изъ F проведемъ FP параллельную съ TM, получимъ чрезъ сїе треугольникъ FMP равнобедренный за тѣмъ, что углы радїусовъ движенїя съ тангенсомъ равны по § 20, а по сему и лежащїе на крестъ MFP и MPF равны между собою такъ, что $MF = MP$. Но какъ изъ подобїя треугольниковъ FPf, CDf выходитъ пропорцїя $Ff : cf = fP : fD$ показующая, что $fP = 2fD$, или $fD = DP$, ибо $Ff = 2cf$ по § 14. И такъ по свойству Еллипсиса положивъ $FM + fM$, или $FM + MP + 2PD$, или $2FM + 2PD$ равнымъ $2a$, найдемъ, что $PM + PD = a$. Такъ же въ Иперболѣ фиг. 23 положивъ $fM - FM =$ или $2PD - 2FM$ равнымъ $2a$, откроемъ тотъ часъ, что $PD - FM = DM = a$.

§ 50.

Радїусы кривизны.

Кругъ проходящїй чрезъ какую нибудь точку r кривой линеи, имѣющїй съ нею въ сей точкѣ одну касательную и центръ на линеѣ rn перпендикуларной къ сей касательной такъ, что изъ сего центра большимъ радїу-

діусомъ нежели nr описанный кругъ пройдетъ выше безмѣрно малой дуги около точки r находящейся, а меньшимъ описанный ниже, называется *кругомъ прикосновенія*, а радіусъ его *радіусомъ кривизны*. Для великаго употребленія въ разныхъ случаяхъ сего круга, нужно оный разобрать.

§ 51.

Для краткости положимъ діаметръ rg (фиг. 25) $= 2g$, сопряженный $hH = 2h$, радіусъ движенія $fr = r$ радіусъ кривизны $rn = m$, перпендикуларъ rq изъ точки прикосновенія на діаметръ $hH = q$, перпендикуларъ ft изъ фокуса на тангенсъ $= t$, аппликату круга $lz = lx = lu$ (по причинѣ безмѣрно малой разности происходящей отъ безмѣрной малости дуги lr) $= y$. При сихъ наименованіяхъ $m = \frac{h^2}{q}$ какъ въ Еллипсисѣ, такъ и въ Иперболѣ.

Доказ. Подобные треугольники rxz, rCq (по причинѣ параллельнаго положенія линей hH и lo, изъ коихъ послѣдняя есть ордината круга, перпендикуларна къ rn и параллельна tT и hH) даютъ пропорцію $rx : rz = rC : rq$, или называя rx буквою x, $x : rz = g : q$ Отсюда $rz = \frac{qx}{g}$. Но какъ x по свойству круга $=$

lz^2

$\frac{1z^2}{2m-x} = \frac{y^2}{2m}$ (ибо x безмѣрно мало въ сравненіи съ 2m); то $\frac{qx}{g} = \frac{y^2}{2m}$ и $m = \frac{gy^2}{2qx}$. Поелику же извѣстно изъ фиг. § 46 и 47, что $y^2 : 2gx \pm xx = h^2 : g^2$, гдѣ xx предъ 2gx можетъ быть почтенъ за ничто, ибо x^2 есть безконечная малость второй степени смот. § 8 калк. И такъ $y^2 : 2gx = h^2 : g^2$ и $y^2 = 2g\frac{xh^2}{g^2}$ такъ, что $m = \frac{gy^2}{2qx} = \frac{h^2}{q}$. Отсюда слѣдуетъ 1) что поелику hq есть параллелограммъ сопряженныхъ полудіаметровъ (ибо rq есть перпендикуларъ изъ r на hH, а параллелограммъ полудіаметровъ по § 45 = a. b; то $h^2 = \frac{a^2b^2}{q^2}$ и $m = \frac{a^2.b^2}{q^3}$. 2) Что по причинѣ подобія треугольниковъ tfr и rdq, въ коихъ t и q прямые, a d и trf на крестъ, rq: rd = ft: fr или q: a = t: r, поставляя вмѣсто rd по § 49 a, и $q = \frac{at}{r}$, $q^3 = \frac{a^3t^3}{r^3}$, а $m = \frac{r^3b^2}{at^3} = \frac{r^3p}{2t^3}$ за тѣмъ, что параметръ $p = \frac{2b^2}{a}$, а $\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$. 3) Что ежели изъ центра C Еллипсиса фиг.

27 или Иперболы фиг. 28 опустить перпендикуларъ Cn на тангенсъ и провесть нормальную rE, треугольники CnT и ErP въ n и P прямоугольные и имѣющіе углы E и T равные (поелику въ Еллипсисѣ каждый изъ нихъ есть уголъ дополненія до 90° къ углу t, а въ Иперболѣ одинъ уголъ дополненія къ углу Ctn, а другой къ равному ему углу rtE) даютъ пропорцію Cn: CT = rP: rE или rq (ибо rq параллельная Cn между параллельными nr, Cq равна Cn): CT = Cp: rE и rq. rE = CT. Cp; но CT. Cp = b^2, ибо Pt по §

$$25 = \frac{2ax \pm xx}{a \pm x} : Ct = a + at \quad \frac{ax}{a \pm x} + a = \frac{a^2}{a \pm x} =$$

$$y : CT \text{ и } CT = \frac{a^2 y}{2ax \pm x^2} \text{ а } CT.\ Cp = \frac{a^2 y^2}{2ax \pm xx} =$$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2} \left(\frac{2ax \pm xx}{2ax \pm xx} \right) = b^2.$$ Отсюда rq. rE = b^2 и

$$q = \frac{b^2}{rE} = \frac{b^2}{M},$$ полагая rE = M, а $q^3 = \frac{b^6}{M^3}$;

слѣдов. $m = \frac{a^2 b^2}{q^3} = \frac{a^2 M^3}{b^4}$.

§ 52.

Въ Параболѣ $m = \frac{p}{2} . \frac{r^3}{t^3}$. Въ самомъ дѣлѣ треугольникъ rxu фиг. 30 равнобедренный по

причинѣ

причинѣ равенства угловъ $x = mrx$ и $u = urM$. Слѣдств. $rx = ru$ Поелику rzu подобенъ rft для равенства прямыхъ угловъ t и z и на крестъ лежащихъ zur и frt такъ, что $ru : rz = rf : ft$ или $x : \frac{y^2}{2m} = r : t$. Отсюда $m = \frac{ry^2}{2tx}$: но

какъ y^2 по § 42 $= x \cdot 4r$, $\frac{p}{4} \cdot r = t^2$; то $m = \frac{4r^2x}{2tx} = \frac{2r^2}{t} = \frac{pr^3}{2t^3}$.

§ 53.

Изъ всего сказаннаго видно, 1) что радїусы кривизны въ разныхъ точкахъ Параболы содержатся какъ квадраты радїусовъ движенїя раздѣленные на перпендикуляры изъ фокусовъ на тангенсъ опущенные, или какъ кубы оныхъ радїусовъ раздѣленные на кубы оныхъ перпендикуляровъ; ибо $\frac{p}{2}$ есть количество постоянное. 2) Что въ Еллипсисѣ и Иперболѣ такъ же радїусы кривизны содержатся, какъ кубы радїусовъ движенїя раздѣленные на кубы перпендикуляровъ изъ фокуса на тангенсы опущенныхъ, какъ то видно изъ пункта 2 § 51.

§ 54.

Площади криволинейныхъ пространствъ.

Къ нахожденїю площадей кривыми линеями окружаемыхъ, такъ какъ и толстоты тѣлъ отъ кругообращенїя какихъ нибудь фигуръ произходящихъ, поверхности сихъ тѣлъ и спрямленїю кривыхъ линей употребимъ мы дифференцїальное и интегральное вычисленїе, которое тѣмъ къ сему способнѣе, что оно одно даетъ общее правило для всѣхъ кривыхъ линей. И такъ начнемъ о площадяхъ. Естьли ф. 11. представляетъ какую нибудь кривую линею, которой ось падаетъ на линею AK, AP абсцисса, HP и PM равныя аппликаты, а линея DLN въ безмѣрно маломъ разстоянїи отъ HPM такъ, что $PL = dx$, а $DR = NO = dy$; то не трудно понять, что площадь трапецїя HDMN безконечно мало разнится отъ площади прямоугольника HRMO, или разнится площадью треугольниковъ HDR и MON, кои суть $\frac{dx.dy}{2} + \frac{dx.dy}{2} =$ $dx.dy =$ безконечной малости умноженной на безконечную же малость. Смот. § 8 калькул. По сему $= 2ydx$ и можетъ почесться безконечно

нечно малымъ приращенїемъ криволинейнаго пространства, или его дифференцїаломъ. И такъ сїе пространство $= S2ydx$, гдѣ стоитъ только вмѣсто y и x поставить изъ уравненїя каждой кривой линеи имъ равное, взять его интегралъ, а по томъ, смотря по величинѣ и положенїю x будетъ увеличиваться площадь, коея ydx есть дифференцїалъ такъ, что можно находить цѣлую площадь криволинейную, естьли не безконечна.

§ 55.

Въ Параболѣ $y^2 = px$, $y = \sqrt{px}$, $2ydx = 2dx\sqrt{px}$. И такъ остается взять интегралъ отъ $2dx. \sqrt{px}$. Для сего по § 14 ученїя о интегральномъ вычисленїи превративъ корень въ степень, будетъ $2dx \sqrt{px} = 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$, далѣе по уничтоженїи dx, прибавленїи къ показателю степени перемѣннаго количества x единицы и раздѣленїи на сїю сумму выйдетъ $Sx^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, а $2p^{\frac{1}{2}}$ количество постоянное стоитъ только умножить на найденный интегралъ, чтобъ получить $S2dx\sqrt{p} = S2p^{\frac{1}{2}}. x^{\frac{1}{2}}dx = 2p^{\frac{1}{2}} Sx^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3}x. \sqrt{px} = \frac{4}{3}xy = \frac{2}{3}x. 2y$. Изъ сего видно, что каждый отрѣзокъ Параболы НАМ, большїй его или меньшїй, смотря по величинѣ x, равенъ $\frac{2}{3}$ прямоугольника, коего основанїе $= x$, а высота $= 2y$.

§ 56.

§ 56.

На семъ утверждаясь легко найти площадь Параболическаго вырѣзка yHXM ф. 11 между двумя ординатами yX, HM содержащагося, въ коемъ Uy, Hp и Up извѣстны. Для сего должно сдѣлать пропорцію Hp^2: yU^2 = AP: AU по пункту 1 § 7, а изъ ней другую $HP^2 - yV^2$: yU^2 = AP—AV = VP AV. Отсюда AV, а слѣдовательно и AP сыщется. И такъ $\frac{2}{3}$ AP. 2HP— $\frac{2}{3}$ AV. 2yU = $\frac{4}{3}$ (AP.HP — AV. yU) = вырѣзку yHXM.

§ 57.

Въ Кругѣ, Еллипсисѣ и Иперболѣ изъ дифференціала 2ydx совершеннаго интеграла найти не возможно, а приближаться къ нему должно посредствомъ безконечной строки. Такъ на пр. въ уравненіи для круга, которое извѣстно изъ простой геометріи и состоитъ въ томъ, что всегда квадратъ перпендикулара отъ окружности на діаметръ опущеннаго равенъ произведенію отрѣзковъ діаметра, или $y^2 = aa - xx$, полагая діаметръ 2a, абсциссу = a—x; $y = \sqrt{(aa-xx)}$, $2ydx = 2dx \sqrt{(aa-xx)}$, а $2\int ydx = 2\int dx \sqrt{(aa-xx)}$.

§ 58.

Въ Еллипсисѣ, принимая вмѣсто параметра p, $\frac{2b^2}{a}$ и называя абсциссу a—x, или линею

PC фиг. 5 буквою x, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}$ (aa—xx), $y = \frac{b}{a}$ $\sqrt{aa-xx}$, $2ydx = 2dx \cdot \frac{b}{a} \sqrt{aa-xx}$, а $2\int ydx = \frac{2b}{a} \int dx \sqrt{(aa-xx)}$. Сїе показываетъ 1) что при одной абсциссѣ на Y AP = x фиг. 5 площадь Еллиптическаго сегмента HAZ содержится къ площади сегмента круга, которой радїусомъ AC = a описанъ изъ C и коего хорда есть продолженная въ верхъ и въ низъ HZ, какъ $\frac{b}{a} : 1 = b : a$. 2) что для сысканїя настоящаго интеграла отъ $dx \sqrt{aa-xx}$ должно $\sqrt{(aa-xx)}$ разрѣшить въ безконечную строку помощїю Невтонова правила. По сему въ формулѣ $(a-b)^n = a^n - n \cdot a^{n-1}b + n \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot a^{n-4} b^2 - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot a^{n-3}b^3 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot a^{n-4} b^4$ и проч. поставивъ вмѣсто a, a^2, вмѣсто b, x^2, вмѣсто n, $\frac{1}{2}$ получимъ $(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$.

Сей рядъ умноживъ на dx, должно взять интегралъ.

интегралъ. И такъ $\int\left(adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}\right) = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{x^9}{1152a^7}$. Сей интегралъ для круга должно умножить только на 2, а для Еллипсиса на $\frac{2b}{a}$. Дабы полкруга или полъеллипсиса получить площадь, надобно положить $x = a$ (ибо въ полукружіи и полъеллипсисѣ, считая абсциссы отъ центра, или полагая абсциссу равною $a - x$, x неминуемо $= a$, абсцисса же $= 0$) $= 1$. По сему площадь полкруга $= \left(a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{a^2}{1152}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}\right)$ а цѣлаго круга площадь $= 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \frac{1}{56} - \frac{1}{576}\right)$: площадь же полуеллипсиса равна площади полкруга умноженной на $\frac{b}{a}$. Такъ же и весь Еллипсисъ равенъ кругу большею полуосью описанному умн. на $\frac{b}{a}$. Отъ сюда слѣдуетъ, что Еллипсисъ содержится къ кругу большею полуосью описанному какъ $b : a$. 3) Что Еллипсисъ равенъ такому кругу, коего діаметръ есть средняя пропорціональная линея между его осями. Доказ. Положивъ площадь Еллипсиса $= c$, площадь круга описаннаго большею полу-

осью $= d$, выйдетъ $c: d = b: a$ по 2 пункт. сего § ; но площади круговъ содержатся какъ квадраты дïаметровъ. Слѣд. назвавъ дïаметръ круга равнаго Еллипсису буквою z, получимъ $d: c = a^2: z^2$, отсюда $z^2 = \frac{a^2.c}{d} = \frac{a^2bd}{ad} = ab$. 4) Что Еллипсисъ содержится къ кругу описанному меньшею полуосью, какъ $a: b$. Ибо положивъ площадь сего круга $= v$ видно будетъ, что $d: v = ab: b^2$, ибо дïаметръ круга d по 3 пункт. $= \sqrt{ab}$.

§ 59.

Площадь Иперболы тѣмъ только разнится отъ площади Еллипсиса, что вездѣ вмѣсто — выйдетъ +. Въ прочемъ безконечная строка входящая въ изображенïе площади круга Еллипсиса и Иперболы ясно показываетъ, что до совершенной квадратуры всѣхъ сихъ трехъ криволинейныхъ пространствъ достигнуть не можно, а только приближаться къ ней по произволенïю находится способъ.

§ 60.

Толстота тѣлъ отъ обращенïя всякихъ фигуръ около одного бока происходящихъ.

Естьли представить, что въ фиг. II. тра-

трапецій HPLD обращается около PL; то произойдетъ урѣзанный конусъ безмѣрно мало разнящійся отъ цилиндра, который происходитъ отъ обращенія прямоугольника HRPL около PL. Итакъ онаго конуса толстота = толстотѣ сего цилиндра = $\frac{\pi y^2 dx}{2}$ за тѣмъ, что полагая содержаніе радіуса къ окружности равнымъ 1: π, выходитъ площадь круга описуемаго линеею HP = $\frac{\pi y^2}{2}$. По сему принявъ $\frac{\pi y^2 dx}{2}$ за дифференціалъ тѣла произойти долженствующаго отъ обращенія HAP около AP, легко примѣтить, что $\frac{\pi}{2} \int y^2 dx$ = тѣлу отъ обращенія HAP. Итакъ полагая вмѣсто y и x изъ уравненія каждой кривой линеи имъ равное, получать удобно толстоту разныхъ тѣлъ отъ обращенія плоскостей около одной стороны произходящихъ.

§ 61.

Отъ обращенія параболическаго сегмента HPA около AP произходящее тѣло называется *коноидомъ параболическимъ*. Толстота его удобно сыщется слѣд. образомъ:

y^2 въ Параболѣ $= px$, $y^2dx = pxdx$, $\int y^2dx =$ $\frac{px^2}{2} = \frac{y^2.x}{2}$, а $\frac{\pi}{2}. \int y^2dx = \frac{\pi}{2}.\frac{y^2x}{2}$ т. е. толстота коноида отъ HAP произходящаго $= \frac{1}{2}$ цилиндра, коего радїусъ основанїя $= y$, а высота x.

§ 62.

Чтобъ найти толстоту урѣзаннаго параболическаго коноида произходящаго отъ обращенїя трапецїя HyUP около UP, должно по § 56 найти по даннымъ HP, yU и UP, AP и AV; по томъ толстому AyM и AHX и первую изъ второй вычесть. Но какъ $AV = \frac{VP.\ Vy^2}{Hp^2 - Vy^2}$, а $AP = \frac{VP.\ HP^2}{HP^2 - Vy^2}$; то толстота меньшаго коноида Ayx будетъ $= \frac{\pi VP.\ Vy^4}{4(HP^2 - Vy^2)}$; а большаго толстота $= \frac{\pi}{4} \frac{VP.\ HP^4}{(HP^2 - Vy^2)}$, разность же ихъ $= \frac{\pi.V\ P}{4(Hp^2 - Vy^2)}\left(\frac{Hp^4 - Vy^4}{}\right) = \frac{\pi}{4}.$ $VP\ (Hp^2 + Vy^2)$ (разрѣшая $HP4 - Vy4$ на два множителя $HP^2 + Vy^2$ и $HP^2 - Vy^2$) $=$ толстотѣ вырѣзка HyxM. То есть для нахожденїя ея, между площадью большаго круга $\frac{\pi}{2}.HP^2$ и площадью меньшаго $\frac{\pi}{2}\ Vy^2$ берутъ

сред-

среднюю ариѳметическую пропорціональную $\pi\left(\frac{HP^2+Vy^2}{4}\right)$ и умножаютъ на высоту вырѣзка VP. Такимъ образомъ предписываютъ нѣкоторые Геометры находить толстоту бочекъ; но сіе правило тѣмъ ближе подходитъ къ правдѣ, чѣмъ фигура бочки сходнѣе съ параболическимъ коноидомъ. Въ прочемъ вырѣзокъ yHXM довольно сходствуетъ съ половиною большей части бочекъ.

§ 63.

Толстота шара сыщется слѣдующимъ образомъ: $y^2=2ax-x^2$. По сему $\frac{\pi}{2}\int y^2dx=\frac{\pi}{2}\int(2axdx-x^2dx)=\frac{\pi}{2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)$. По сей формулѣ какъ для каждаго сегмента шара сыщется толстота, опредѣляя x, такъ и для цѣлаго полушарія, полагая $x=a$, такъ, что полушаріе $=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{\pi}{3}a^3$, а цѣлаго шара толстота $=\frac{2}{3}\pi a^3$.

§ 64.

Толстота тѣла происходящаго отъ обращенія полуеллипсиса около какой нибудь оси и называемаго *сфероидомъ* или *тѣломъ шаровиднымъ*, находится такъ же, какъ

толстота шара. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. И такъ

$\frac{\pi}{2} Sy^2 . dx = \frac{\pi b^2}{2a^2}(2axdx - x^2dx) = \frac{\pi b^2}{2a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$. Сїя формула показываетъ толстоту сегмента, сфероида, и полусфероида полагая вмѣсто x, a. И такъ полусфероидъ $= \frac{\pi b^2}{2a^2} . \frac{2a^3}{3} = \frac{\pi}{3} ab^2$, а сфероидъ $= \frac{2}{3}\pi ab^2$ т. е. равенъ $\frac{2}{3}$ цилиндра, коего дїаметръ основанїя меньшая ось, а высота большая. По сему 1) Сфероидъ содержится къ шару, коего дїаметръ равенъ большой оси, какъ $ab^2 : a^3$ или какъ $b^2 : a^2$. 2) Сфероидъ равенъ такому шару, котораго полудїаметръ есть вторая изъ двухъ среднихъ пропорцїональныхъ геометрическихъ линей между a и b. Ибо полагая толстоту шара имѣющаго полудїаметромъ большую полуось $= d$, толстоту сфероида $= c$, дїаметръ равнаго сфероиду шара $= z$, найдемъ, что $d : c = a^3 : z^3$ и $z^3 = \frac{c.a^3}{d}$; но

$c : d = b^2 : a^2$, или $c = \frac{b^2 d}{a^2}$ По сему $z^3 = \frac{a^3 b^2 d}{a^2 d} = ab^2$. 3) Сфероидъ седержится къ шару, коего дїаметръ $=$ меньшой оси, какъ $a : b$. Ибо называя толстоту сего шара буквою g по-

получимъ $d : g = a^3 : b^3$, но $d = \frac{a^2c}{b^2}$; и такъ $g = \frac{a^2cb^3}{b^2a^3} = \frac{cb}{a}$ и $c : g = a : b$.

§ 65

Толстота Иперболическаго коноида $= \frac{\pi b^2}{2a^2} \cdot \int(2ax + x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{2a^2} \cdot \left(ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) = \frac{\pi b^2}{2a^2} \left(a^3 + \frac{a^3}{3}\right)$, полагая высоту коноида $= a$. Сїе показываетъ, что въ семъ случаѣ Иперболическїй коноидъ $= \frac{4}{2} \cdot \frac{\pi . ab^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi ab^2$ т. е. $= \frac{2}{3}$ цилиндра, коего радїусъ основанїя есть половина меньшей оси, а высота $=$ цѣлой большой оси.

§ 66.

Наружная поверхность тѣлъ отъ кругообращенїя плоскостей произходящихъ.

Когда трапецїй HDPL фиг. II. обращаясь около PL производитъ урѣзанный конусъ; тогда HD движенїемъ своимъ производитъ его поверхность такъ, что она равна окружности круга описаннаго радїусомъ HP или DL (ибо они безмѣрно близки) умноженной на HD. Но какъ $HD = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, принимая

нимая треугольникъ HDR за прямолинейный, ибо HD по безмѣрной малости отъ прямой линеи почти не разнится, а окружность круга, коего радïусъ есть y, $= \pi y$; то наружной поверхности каждаго тѣла отъ кругообращенïя криволинейной фигуры происходящаго дифференцïалъ будетъ равенъ $\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, а самая поверхность $= \pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

§ 67.

Поелику въ Параболѣ $y^2 = px$ и $2ydy = pdx$; то $dx = \frac{2ydy}{p}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, а $y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$

$$y\sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2\right)} = \frac{ydy}{p} \sqrt{4y^2 + p^2} = \frac{ydy}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Сего количества интегралъ взять удобно по § 14 калк. слѣд. образомъ: приложивъ къ $\frac{1}{2}$ единицу, сумму сïю умноживъ на дифференцïалъ стоящихъ подъ корнемъ количествъ раздѣлить надлежитъ на сïе произведенïе данный дифференцïалъ. И такъ $\int \frac{ydy}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12p}$ $(4y^2 + p^2) . (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$. Дабы узнать, не должно ли къ сему интегралу приложить постояннаго количества, или отъ него отнять, надобно перемѣнную величину въ сысканномъ интегралѣ положить равною нулю,

нулю, и ежели послѣ сего что нибудь изъ интеграла останется, то сїе будетъ лишняя постоянная величина, которую должно изъ интеграла отнять; ежели же выйдетъ въ интегралѣ — или остатокъ отрицательный, должно оный принять за постоянную величину съ +. И такъ положивъ $y = o$ надлежало бы интегралу быть равнымъ o, ибо когда аппликата въ Параболѣ $= o$, тогда и наружная поверхность коноида должна быть равна o; но интегралъ выйдетъ $= + \frac{p^2}{12}$. Слѣдов. настоящїй интегралъ будетъ $=$

$$\frac{(4y^2+p^2)\ (4y^2+p^2)^{\frac{1}{2}}}{12p} - \frac{p^2}{12}$$ и умноживши на $\pi =$

$$\frac{\pi}{12p}\ (4y^2+p^2)\ (4y^2+p^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{p^2}{12}\pi.$$ Въ прежнихъ

случаяхъ, въ которыхъ мы брали интегралы, для того не упоминаемо было о постоянныхъ величинахъ, что въ нихъ поставляя перемѣнное количество равнымъ o, интегралъ выходитъ равнымъ нулю, какъ то всякому примѣтить удобно.

§ 68.

Наружность шара сыскивается такъ: $y^2 = 2ax - xx$, а $y\,dy = adx - xdx$. По сему $dy^2 =$

(a—x)

$\frac{(a-x)^2 dx^2}{y^2}$; $dy^2 + dx^2 = \frac{dx^2(a^2 - 2ax + xx + 2ax - xx)}{y^2} =$

$\frac{a^2 dx^2}{y^2}$, а $\sqrt{dy^2 + dx} = \frac{adx}{y}$. Умноживъ сїе количество на πy, выйдетъ $\pi S y \sqrt{(dy + dx^2)} = \pi ax$, гдѣ положивъ $x = 2a$, получится поверхность всего шара $= 2\pi a^2$.

§ 69.

Спрямленїе кривыхъ линей.

Интегральное вычисленїе можетъ быть употреблено съ великою выгодою въ спрямленїи кривыхъ линей, или справедливѣе сказать, въ способѣ, какъ кривой линеи содержанїе къ прямой, сколько можно ближе и точнѣе, можно означать. Для сего должно безмѣрно малую дугу HD фиг. II представить дифференцїаломъ дуги AH и нашедши свойство первой изъ уравненїя кривой линеи, доходить до AH чрезъ интегральное вычисленїе, или находя интегралъ онаго дифференцїала; но $HD = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. И такъ должно сыскивать $f(\sqrt{dx^2 + dy^2})$.

§ 70.

Въ Параболѣ $y^2 = px$, $dx = \frac{2ydy}{p}$, $dx^2 = \frac{4y^2 \cdot dy^2}{p^2}$, $dx^2 + dy^2$

$dy^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{dy^2}{p^2}(4y^2+p^2)$, а $\sqrt{dx^2+dy^2} =$

$\frac{dy}{p}\sqrt{4y^2+p^2}$. И такъ дабы найти сего количества интегралъ, должно по Невтонову биномїю $(4y^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$ превратить въ безконечную строку, которая и будетъ: $p + \frac{2y^2}{p} - \frac{2y^4}{p^3} + \frac{4y^6}{p^5} - \frac{10y^8}{p^7}$ и т. д. какъ то видно изъ § 58 пунк. 2. Умноживъ на $\frac{dy}{p}$ сїю строку получимъ другую: $dy + \frac{2y^2dy}{p^2} - \frac{2y^4dy}{p^4} + \frac{4y^6dy}{p^6} - \frac{10y^8dy}{p^8}$, коей интегралъ равный дугѣ параболической $AH = y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8}$.

§ 71.

Можно спрямить такимъ же образомъ и дугу круга, или подойти, сколько можно, близко къ измѣренїю долготы ея прямою линеею; но на сїе есть легчайшїй способъ слѣдующїй: проведши изъ A фиг. 31 касательную линею At, изъ центра C линею Ct и безмѣрно близко къ ней другую CT пресѣкающую продолженный тангенсъ въ T и

опу-

опустивши изъ t на cT перпендикуларъ ot, не трудно понять, что по безмѣрной малости угла tCT внѣшній уголъ AtC будетъ равенъ другому внутреннему tTo и слѣдственно треугольники tTo и AtC въ o и A прямоугольные будутъ подобны. По сему полагая AC = 1, At = z, tT будетъ = dz, а tC = $\sqrt{(1 + z^2)}$ и $\sqrt{(1 + z^2)} : 1 = dz : ot$. Отсюда $ot = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ и какъ ot перпендикуларна къ CT и mn безмѣрно малая дуга отъ прямой линеи почти не разнится; то mnc можно почесть за прямолинейный треугольникъ, коего сторона mn къ mC перпендикуларна (ибо дуга круга всегда къ своему радїусу перпендикуларна) и при томъ mnC будетъ Cto подобенъ такъ, что Ct : ot = Cn : nm или $\sqrt{(1+z^2)} : \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = 1 : mn$. По сему $mn = \frac{dz}{1+z^2} = dz$ $(1-z^2+z^4-z^6+z^8)$ по § 16 калкул. а интегралъ сей строки есть: $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9}$. Ежели дуга An есть въ 45°, то z = 1 и слѣдственно осьмая доля окружности = $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, а для долготы всей окружности должно сїю строку умножить на 8.

При

При семъ замѣтить должно, что и по данной дугѣ можно найти ея тангенсъ, или полагая найденный рядъ $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$ и проч. $=$ M $=$ дугѣ, коея тангенсъ $= z$, по данному M можно найти z. Для сего положимъ $z = aM + bM^3 + cM^5 + dM^7$ и проч. и поелику $- M + z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} = o$,

а $Z^3 = a^3M^3 + 3a^2bM^5 + 3ab^2M^7 + 3a^2cM^7$ и проч.

$Z^5 = a^5M^5 + 5a^4bM^7$ и проч.

$Z^7 = + a^7M^7$,

то $- M = -M$.

$+ Z = aM + bM^3 + cM^5 + dM^7$.

$\frac{-Z^3}{3} = - \frac{a^3M^3}{3} - a^2bM^5 - ab^2M^7 - a^2cM^7$.

$\frac{-z^5}{5} = + \frac{a^5M^5}{5} + a^4bM^7$.

$\frac{-z^7}{7} = - \frac{a^7M^7}{7}$.

По сему $a - 1 = o$; $a = 1$; $b - \frac{1}{3}a^3 = b - \frac{1}{3} = o$; $b = \frac{1}{3}$; $c - a^2b + \frac{a^5}{5} = o$; $c = \frac{2}{15}$; $d - ab^2 - a^2c + a^4b - \frac{a}{7} = o$; $d = \frac{17}{315}$. Слѣдовательно $z = M + \frac{1}{3}M^3 + \frac{2}{15}M^5 + \frac{17}{315}M^7$.

§ 72.

Превращенный способъ тангенсовъ.

Способъ изъ данной касательной линеи въ буквахъ, или другой отъ нея зависящей, каковы суть субтангенсъ, нормальная и субнормальная, находить самую кривую линею, къ которой онѣ принадлежатъ, *способомъ превратнымъ тангенсовъ* именуется.

§ 73.

Для сего изъ даннаго уравненія должно опредѣлить y, или сыскать какое онъ имѣетъ отношеніе къ x; оно покажетъ натуру и свойства кривой линеи.

§ 74.

Найти кривую линею, коей субнормальная равна половинѣ параметра? субнормальная $= \frac{ydy}{dx}$ по § 25. По сему $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$, $2ydy = pdx$, $y^2 = px$ т. е. кривая линея искомая есть Парабола.

§ 75

Найти линею, коей субтангенсъ равенъ $\frac{2y^2}{p}$. $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p}$, $pdx = 2ydy$ и $y^2 = px$ т. е. сія линея есть Парабола.

§ 76.

§ 76.

Можно такъ же по даннымъ площадямъ, толстотамъ и поверхностямъ, находить самыя кривыя линеи, къ коимъ они принадлежатъ, сравнивая данныя количества съ общими *выраженїями* въ четырехъ предъ симъ находящихся трактатахъ *выведенными*.

§ 77.

Найти кривую линею, отъ обращенїя которой около оси произходитъ тѣло, коего толстота $= \frac{\pi . px^2}{4}$? Полагая дифференцїалъ сей толстоты $\frac{\pi}{2} . p . xdx = \frac{\pi}{2} . y^2 \, dx$, получимъ $px = y^2$.

§ 78.

Симъ оканчиваю я ученїе о сѣченїяхъ Коническихъ, увѣренъ будучи, что уразумѣвшему предложенные въономъ XIII трактатовъ, поступъ къ дальнѣйшимъ познанїямъ сей части Математики не будетъ труденъ.

ЧАСТЬ II.

О другихъ кривыхъ линеяхъ.

§ 79.

Кривыя линеи раздѣляются по ихъ уравненiямъ на *Алгебраическiя* и *Трансцендентныя*. Дабы сiе представить себѣ явственно, на передъ надобно замѣтить, что такое *уравненiе*, въ которомъ какая нибудь степень аппликаты y равна совершенно, нѣкоторому имѣющему предѣлъ числу членовъ, въ коихъ разныя находятся степени абсциссы x и произведенiя на разныя величины, называется *алгебраическимъ*, какъ то $y^2 = ax - xx$ есть уравненiе алгебраическое; ибо въ немъ квадратъ аппликаты совершенно равенъ произведенiю постоянной величины a на абсциссу безъ квадрата абсциссы. На противъ того тѣ уравненiя, въ коихъ степень аппликаты равна безконечному числу членовъ содержащихъ въ себѣ абсциссу въ какихъ либо видахъ, называются *Трансцендентными*. Такъ на пр. ежели аппликата равна тангенсу абсциссы; то безконечно великую должно имѣть строку членовъ содержащихъ въ себѣ x, дабы сравнить y съ са-

самимъ x § 71. Такъ же когда $y = \log x$, должно x разрѣшить на безконечную строку въ разныхъ видахъ, чтобы онъ равенъ былъ y. См. § 93 пунктъ 4.

§ 80.

Алгебраическія кривыя линеи, коихъ члены уравненія имѣютъ два измѣренія, или суть второй степени, принадлежатъ къ первому роду, или называются кривыми *перваго рода*. Ибо одна только прямая линея въ уравненіи своемъ всѣ члены имѣетъ только первой степени. Ежели же въ членахъ уравненія кривой линеи находятся три измѣренія или третья степень; то она *втораго рода*; имѣющая въ своемъ уравненіи четвертую степень, есть третьяго рода и т. д. такъ, что родъ всегда единицею меньше самаго большаго въ уравненіи указателя степени. Отсюда видно, что сѣченія коническія, кои выше сего описаны, суть кривыя линеи перваго рода.

§ 81.

Ежели вмѣсто опредѣленныхъ указателей въ уравненіи поставятся неопредѣленные; то тогда уравненіе будетъ общее для великаго множества кривыхъ линей, которое и называется ихъ *фамиліею* на пр. Въ уравненіи

$y^2 = px$, поставивъ вмѣсто p^1, p^m и вмѣсто y^2, y^{m+1}, выйдетъ уравненіе $y^{m+1} = p^m.x$, которое есть общее всей фамиліи Параболъ. Такъ же изъ уравненія $y^2 = ax - xx$ можно сдѣлать общее для всей фамиліи круговъ уравненіе: $y^{m+1} = a^m x - x^{m+1}$.

§ 82.

Поставляя вмѣсто m другія числа, а не единицу, получимъ разныхъ родовъ кривыя линеи одной фамиліи, какъ то въ уравненіи для круга поставляя $m=2$, будемъ имѣть $y^3 = a^2x - x^3$ уравненіе круга втораго рода, а полагая $m=3$ получимъ $y^4 = a^3x - x^4$, уравненіе круга третьяго рода и т. д. Такимъ же образомъ и въ фамиліи Параболъ получатся разныхъ родовъ Параболы такъ, что $y^3 = p^2x$ есть уравненіе Параболы втораго рода. Не трудно понять, что въ фамиліяхъ всѣхъ алгебраическихъ линей таковые разные роды находятся, кои естественно фигурою между собою должны различествовать, а только одно имѣютъ названіе.

§ 83.

Польза, которую приноситъ раздѣленіе кривыхъ линей на роды состоитъ въ томъ, что можно выбирать по произволенію линею изъ многихъ одного рода для рѣшенія задачь;

дачь; а фамилїи показываютъ, что многимъ кривымъ линеямъ есть общее.

§ 84.

Употребительнѣйшїя изъ алгебраическихъ линей суть: *Конхоида* и *Циссоида*; а изъ трансцендентныхъ Циклоида, Спиральная, Логариѳмическая и Квадратриксъ.

§ 85.

О Конхоидѣ Никомидовой.

Ежели изъ какой нибудь точки A фиг. I опустится на прямую линею ao перпендикуляръ AaB и по томъ изъ оной же точки проведется нѣсколько линей чрезъ ao съ такимъ условїемъ, чтобъ ихъ части находящїяся отъ точки A по ту сторону линеи ao были между собою равны т. е. $dm = aB$ и проч. то концы сихъ линей изъ A проведенныхъ будутъ находиться на кривой линеѣ называемой *Конхоидою.*

§ 86.

Опустивъ изъ m перпендикуляры mo и mH на ao и на AB и положивъ $aH = x$, $mH = y$, $aB = dm = b$, $Aa = c$, получимъ изъ подобїя треугольниковъ Ada, AmH пропорцїю $Aa : ad = AH : Hm$ или $c : ad = c + x : y$ т. е. $ad =$

 су

$\frac{cy}{c+x}$. Но какъ $ad = y - do = y - \sqrt{(b^2 - x^2)}$; то c:

$y - \sqrt{(b^2 - x^2)} = c + x : y$, или $c. y = (c + x) y -$

$(c+x) \sqrt{(b^2 - x^2)}$. Отсюда $xy = (c+x) \sqrt{(b^2 - x^2)}$,

$x^2 y^2 = (c+x)^2 (b^2 - x^2) x^2$ а $y^2 = \frac{(c+x)^2 (b^2 - x^2)}{x^2} =$

$\frac{c^2 b^2 + 2cxb^2 + b^2 x^2 - c^2 x^2 - 2cx^3 - x^4}{x^2} = \frac{c^2 b^2}{x^2} + \frac{2b^2 c}{x} +$

$b^2 - c^2 - 2cx - x^2$. Въ семъ состоитъ уравненїе для Конхоиды.

§ 87.

Поелику чѣмъ далѣе AR отъ перпендикулара AB, тѣмъ уголъ BAR больше, а AKa или RKT меньше; то и перпендикуляръ RT отъ часу становится меньше; но по той причинѣ, что линея AR пересѣкаетъ aT, какъ бы далека отъ перпендикулара AB ни была, RT равна нулю быть не можетъ. По сему aT есть асимптотъ Конхоиды.

§ 88

Естьли $x^2 > b^2$; то $\sqrt{(b^2 - x^2)}$ не возможенъ, по сему y такъ же въ семъ случаѣ не возможенъ; ибо онъ равенъ $\frac{(c+x) \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x}$.

§ 89.

Для отрицательныхъ абсциссъ аппликаты возможны, ибо положивъ вмѣсто x, — x, или взявши dδ равную md по другую сторону асимптота и опустивши изъ δ перпендикуларъ на асимптотъ, y всегда останется возможнымъ, а слѣдственно произойдетъ другая часть конхоиды между точкою A и асимптотомъ.

§ 90.

Отрицательная абсцисса, или перпендикуларъ изъ δ на асимптотъ не можетъ быть болѣе δd; слѣдст. для абсциссы отрицательной большей — b аппликата не возможна.

§ 91.

О Циссоидѣ Діокловой.

Когда на концѣ діаметра AB, фиг. 2, на коемъ описано полукружїе AOB будетъ стоять перпендикуларно линея BC, возмется на ней по произволенїю точка H, проведется къ ней линея AH и на конецъ назначится точка M въ такомъ разстоянїи отъ A, какъ велика линея Hi т. е. чтобъ AM была = Hi; то M будетъ находиться на кривой линеѣ называемой *циссоидою*. Уравненїе сея линеи весьма удобно вывесть слѣдующимъ образомъ: положивъ AB = a, AP абсциссу циссоиды = x,

x, PM аппликату ея $= y$, тотъ часъ видно, что $x : y = a : BH$ и $x : AM = a : AH$ и что $BH = \frac{ay}{x}$, но какъ изъ простой геометрїи извѣстно, что квадратъ тангенса BH равенъ произведенїю пересѣкающей кругъ линеи AH на ея отрѣзокъ Hi, или $BH^2 = Hi . AH$; то само по себѣ очевидно, что $\frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{Hi\ a.\ AM}{x} = \frac{a.\ AM^2}{x}, = a\frac{(x^2+y^2)}{x}$. По сему $ayy = (xx+yy)\ x$ или $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Вотъ уравненїе для циссоиды, которое показываетъ 1), что она есть кривая линея втораго рода, 2) что дїаметръ полукружїя раздѣляетъ циссоиду по поламъ за тѣмъ, что по другую сторону дїаметра точно такое же можно сдѣлать полукружїе и точно такїя же брать точки M на циссоидѣ находящїяся, 3) что абсцисса ни отрицательною, ни большею нежели a быть не можетъ; ибо иначе yy былъ отрицательный. По сему ни выше B, ни ниже A ни чего изъ циссоиды не находится; 4) что когда $x = o$, тогда $y = o$, а когда $x = a$, тогда $y = \infty$ и вообще y тѣмъ становится болѣе, чѣмъ x болѣе за тѣмъ, что чѣмъ x болѣе, тѣмъ

тѣмъ числитель дроби $\frac{x^3}{a-x}$ болѣе, а знаменатель меньше. Слѣдов. колѣно кривой линеи AMN отъ часу больше удаляется отъ AB, ибо y становится больше и приближается къ BC, но не можетъ съ нею сойтись такъ, что BC есть асимптотъ циссоиды.

§ 92.

О Логариѳмикѣ.

Естьли брать положительныя абсциссы Aa, AP и проч. фиг. 3 въ Ариѳметической прогрессіи, а соотвѣтствующія имъ аппликаты am Pm и проч. въ прогрессіи геометрической; то кривая линея проходящая чрезъ концы сихъ аппликатъ, называется *логариѳмическою*, за тѣмъ, что абсциссы могутъ быть приняты за логариѳмы аппликатъ. Положимъ, что аппликата AM=1; то тотъ часъ примѣтимъ, что аппликаты большія нежели AM т. е. Pm и пр. имѣютъ положительные логариѳмы AP, аппликаты меньшія, нежели AM, имѣютъ отрицательныя логариѳмы Ap, log AM=o; сверхъ сего, поелику аппликаты составляютъ умаляющуюся Геометрическую прогрессію безконечную; то кривая линея никогда съ PAp не можетъ

сойтись, хотя непрестанно къ ней подходитъ.

§ 93.

Найти субтангенсъ логариѳмики.

Положимъ, что $AB = x$, $BM = y$, $gb = dy$, $Mb = Bf = dx$; то вдругъ увидимъ, что $gb : Mb = MB : Bt$, или $dy : dx = y : \frac{ydx}{dx} = Bt =$ субтангенсу. По сему для другой абсциссы $Aa = v$ и аппликаты ея $am = z$ выйдетъ субтангенсъ $\frac{zdu}{dz}$. Но какъ абсциссы при Логариѳмической линѣе растутъ прогрессïею Ариѳметическою; а аппликаты находятся въ Геометрической прогрессïи; то $dx = du$: ибо разность между двумя абсциссами непосредственно въ прогрессïи одна за другою слѣдующими должна быть одинакова; а $y + dy : y = z + dz : z$, или $y : dy = z : dz$ т. е. $\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}$. Слѣдственно $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdu}{dz}$ и субтангенсы одной Логариѳмики всѣ равны между собою.

1) Отсюда слѣдуетъ, что ежели положить $\frac{ydx}{dy} = a$; то $dx = \frac{ady}{y}$; но $x = \log y$. Слѣдст. $d\log y = \frac{ady}{y}$ и $\int\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, а $x = a.\int\frac{dy}{y}$. Т. е. дифференцïалъ ло-

логариѳма равенъ субтангенсу логариѳмики умноженному на дифференціалъ соотвѣтствующаго количества и раздѣленному на самое оное количество. Такъ же Интегралъ всякаго дифференціала раздѣленнаго на количество, отъ коего онъ взятъ, есть его логариѳмъ раздѣленный на субтангенсъ.

2) Ежели субтангенсъ логариѳмики $= b$; то логариѳмъ будетъ равенъ $b \int \frac{dy}{y}$. Т. е. логариѳмы содержатся, какъ субтангенсы разныхъ логариѳмическихъ линей.

3) Когда субтангенсъ логариѳмики $= 1$; тогда $d\log y = \frac{dy}{y} =$ *дифференціалу отъ* y *раздѣленному на самый* y. Такіе логариѳмы, въ коихъ субтангенсъ $= 1$, называются *Иперболическими*.

4) Найти Иперболическій логариѳмъ чиселъ $1+y$, и $1-y$. Поелику $d\log(1+y) = \frac{dy}{1+y}$; то стоитъ только $\frac{1}{1+y}$ превратить въ безконечную строку и умноживъ нѣсколько членовъ на dy, взять интегралъ. Но какъ $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 \ldots$, $\frac{dy}{1+y} = dy - ydy + y^2dy - y^3dy \ldots$ Слѣдова-

вательно $\int\frac{dy}{1+y} = \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}$..

Такъ же $d\log(1-y) = -\frac{dy}{1-y}$. По сему умноживъ безконечную строку, на которую разрѣшается $\frac{1}{1-y}$ т. е. $1+y+y^2+y^3$.... на $-dy$, получимъ $-dy-ydy-y^2dy-y^3dy$... а $\int\frac{-dy}{1-y} = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}$... $= \log(1-y)$. Отсюда $\log(1+y) - \log(1-y) = 2y + \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{5}\ldots = \log\frac{1+y}{1-y}$. Изъ сего видно, что зная число y, можно находить логариѳмъ его точно такъ же, какъ по данной дугѣ можно находить соотвѣтствующій ей тангенсъ см. § 79..

5) Полагая $\frac{(1+y)}{1-y} = 10$, найдемъ, что $y = \frac{9}{11}$, и что, поставляя вмѣсто y въ знаменованіи $\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ и превращая строку въ десятичныя дроби, выйдетъ $\log 10 = 2{,}302585$. Сей Иперболическій логариѳмъ 10 означимъ буквою N, такъ же полагая $\frac{1+y}{1-y}$ = какому-нибудь числу можно находить его Иперболическій логариѳмъ.

6)

6) Поелику логариѳмы одного числа содержатся какъ субтангенсы разныхъ логариѳмикъ; то Иперболическій логариѳмъ 10. содержится къ логариѳму 10 въ таблицахъ, какъ субтангенсъ Иперболической логариѳмики содержится къ субтангенсу логариѳмики, по которой сочинены таблицы т. е. N: 1 = 1 : x. По сему $x = \frac{1}{N} = 0,434294 =$ субтангенсу табличной Логариѳмики.

7) Отсюда слѣдуетъ, что по данному табличному логариѳму A числа B, можно легко найти Иперболической его логариѳмъ по пропорціи $\frac{1}{N} : 1 = A : z$. слѣд. $Z = N.A =$ A умноженному на 2,302585 и обратно зная z, можно найти A, раздѣляя z на N.

8) При семъ приложимъ такъ же способъ, брать дифференціалъ количества x^y, которое называется *Експоненціальнымъ*. Положивъ $x^y = Z$, получимъ $y\log x = \log z$, и $y d\log x + dy\log x = d\log z$, но $d\log x = \frac{dx}{x}$, а $d\log z = \frac{dz}{z}$; то $\frac{ydx}{x} + dy \log x = \frac{dz}{z}$ и $dz = zydx + zdy.x \log x$. Поставивъ же вмѣсто z, x^y, получимъ $\frac{x^y . ydx}{x} + x^y dy$. Log $x = x^{y-1}\, ydx + x^y.dy. \log x = dz$.

най-

Найти площадь логариөмическаго пространства.

9) Поелику субтангенсъ $\frac{ydx}{dy}$ есть постоянное количество; то назови его буквою a. По сему $\frac{ydx}{dy} = a$, $ydx = ady$, $\int ady = \int ydx = ay$. Но какъ $ydx = BMgf =$ площади дифференціала отъ всего безпредѣльнаго пространства fgnp: то сія безпредѣльная площадь $= ay$. Такъ же площадь $AMnp = az$ полагая $AM = z$. Слѣдовательно площадь $fgAM = ay - az = a(y - z)$ т. е. равна прямоугольнику изъ субтангенса и разности аппликатъ.

§ 94.

Ежели окружность круга APA фиг. 4 раздѣлить на равныя части AP, PP и проч. и радіусъ CA, на столько же раздѣлить равныхъ частей, на сколько раздѣлена окружность, а по томъ взять часть Cm = 3 частямъ, и такъ далѣе; то точки M m, m будутъ находиться на *спиральной линеѣ Архимедовой* Сія линея по произволенію можетъ быть продолжаема безконечно, посредствомъ новыхъ круговъ, кои описывать должно двойнымъ, тройнымъ и т. д. радіусомъ.

§ 95.

§ 95.

Положивъ, что окружность $= p$, радїусъ $= r$, $AP = x$, $PM = y$, а $CM = r - y$; то $p : x = r : r - y$, и $pr - py = rx$. Ежели же $= CM = y$, то $py = rx$.

§ 96.

Найти субтангенсъ въ спиральной линеѣ.

Положимъ, что *фиг.* 5, $AB = a$, окружность $= p$, дуга $BD = x$, $AG = y$, и Ac къ Ad безконечно близокъ. По сему $CD = dx$, $EF = dy$ и поелику EG можетъ почтена быть за дугу, коея радїусъ есть AG; то $AD : AG = CD : EG$ или $a : y = dx : \frac{ydx}{a}$. Но какъ EG съ FA составляетъ прямой уголъ (ибо радїусъ къ своей дугѣ всегда перпендикуляренъ); такъ же AH поставлена перпендикулярно къ EA: то треугольникъ EFG, въ коемъ дуга EG принимается за прямую линею, подобенъ треугольнику FAH, ибо они кромѣ прямыхъ угловъ имѣютъ общїй уголъ при F. По сему можно сказать, что $EFG \backsim AGH$, ибо уголъ AGH (такъ какъ внѣшнїй) $= AFH + FAG = AFH$, по безконечной малости угла FAG измѣряемаго дугой EG. И такъ $FE : EG = AG : AH$ или $dy : \frac{ydx}{a} = y : AH$ и $AH = \text{subtang} = \frac{y^2 dx}{ady}$. По свойству

же

же Архимедовой спиральной линеи $ax = py$, и $adx = pdy$; то поставляя вмѣсто dx, $\frac{pdy}{a}$, получимъ $AH = \text{subtang} = \frac{py^2 dy}{a^2 dy} = \frac{py^2}{a^2} = \frac{axy}{a^2} = \frac{xy}{a}$. Изъ сего видно, что субтангенсъ найти, или провести къ спиральной линеѣ тангенсъ не иначе можно, какъ превративъ дугу x въ прямую линею, и обратно, естьли бы кто нашелъ субтангенсъ спиральной линеи, то можно бы было спрямить дугу круга.

§ 97.

Ежели абсциссы AP, PP и проч. фиг. 4 на окружности круга брать въ прогрессіи Ариөметичсской, а части радїуса CM, cm и пр. имъ соотвѣтствующїя въ геометрической; то точки M, m, m и проч. находиться будутъ на линеѣ, которая называется *спиральною логариөмическою*; ибо тогда дуги были бы логариөмы частей радїуса.

Прибавленїе. Найти площадь Спиральнаго пространства.

Поелику по § 96, фиг. 5 дуга $EG = \frac{ydx}{a}$; то площадь сектора $AEG = \frac{y^2 dx}{2a}$. Но какъ сей безмѣрно малый секторъ есть диффе-

рен-

ренціалъ пространства BAE, и при томъ $ax = py$ и $y^2 = \frac{a^2x^2}{p^2}$; то $y^2 . \frac{dx}{2a} = \frac{ax^2}{2p^2}. dx$. Слѣдственно пространство BAE, или $\int \frac{y^2 dx}{2a} = \int \frac{ax^2 dx}{2p^2} = \frac{ax^3}{6p^2}$. Ежели же вмѣсто x положить всю окружность p; то все Спиральное пространство BAGEB будетъ равно $\frac{ap}{6}$, и поелику площадь сего круга $= \frac{ap}{2}$; то Спиральная площадь содержится къ площади круга, какъ $\frac{ap}{6} : \frac{ap}{2} = 1 : 3$.

§ 98.

Ежели себѣ представить, что кругъ прикасается къ прямой линеѣ въ какой нибудь точкѣ, по томъ начнетъ катиться по оной линеѣ до тѣхъ поръ, пока опять тою же точкою прикоснется къ линеѣ; то кривая линея описываемая сею точкою называется *циклоидою или трохоидою* т. е. колесообразною (die Rad linie). Такъ въ фигурѣ 6, ежели бы кругъ съ начала точкою f прикасался въ A къ линеѣ AC, и по томъ началъ бы катиться; то тччка f отходя отъ A описала бы кривую линею AfBC.

§ 99.

Изъ самаго произхожденїя сей линеи видно 1), что AC= окружности круга производящаго циклоиду; ибо всѣ точки окружности должны перебыть на прямой линеѣ AC, пока опять придетъ на нее f. 2). что AR равная половинѣ AC= полукружїю RmB, 3) что дуга fg= линеѣ Ag; ибо всѣ точки дуги fg, должны были прикоснуться къ линеѣ AC, прежде нежели коснется къ ней g.

§ 100.

Ежели провесть параллельную линею съ Ae; то fp=mz по причинѣ равнаго отстоянїя отъ тангенса, а по тому и отъ центра; слѣдовательно и половины ихъ fk и mp равны между собою. Отсюда видно, что треугольникъ kfg = треуг. pzR и уголъ f= z, а дуга fg= Pg =mR. По сему mR= линеѣ Ag.

§ 101.

Изъ равенства треугольниковъ fkg и mpR слѣдуетъ, что хорда fg= хордѣ mR и параллельна, ибо уголъ gfk= Rmp по равенству треугольниковъ. И такъ fm= gR= дугѣ mB. Слѣдственно называя fm= y, дугу Bm=x получимъ x=y.

§ 102.

Ежели же уравненіе принаровить къ перпендикулару BR изъ средины основанія возставленному, который называется *осью циклоиды* то $fp = y + \sin x$, ибо $mp = \sin.\ mB = \sin\ x$.

§ 103.

Найти субтангенсъ циклоиды.

Провесть надлежитъ тангенсъ tm къ кругу фиг. 7. и параллельную ему линею fk. Поелику въ треугольникѣ flk, lf можетъ почесться по безконечной своей малости за прямую линею; то можно его принять за прямолинейный, и какъ kl параллельна съ fm, а kf параллельна tm; то треугольникъ $lfk \backsim ftm$ и $lk : fk = fm : tm$ или $dy : dx = y : mt$; по сему $mt = s = \frac{ydx}{dy}$. Слѣдовательно mt есть субтангенсъ циклоиды. Но какъ въ циклоидѣ $x = y$ и $dx = dy$; то $\frac{ydx}{dy} = \frac{ydy}{dy} = y$. т. е. субтангенсъ $=$ аппликатѣ. Слѣдовательно, дабы провесть къ точкѣ f циклоиды тангенсъ, надлежитъ только на тангенсѣ къ точкѣ m круга производящаго циклоиду взять $mt = y$ и изъ t къ f провесть линею.

§ 104.

Поелику mt = fm, то уголъ mft = mtf. Слѣдовательно внѣшній уголъ tmP = 2mtf = tmB + Bmb = 2tmB. Ибо tmB = Bmb по тому, что tmB измѣряется половиною дуги mB, такъ же и Bmb измѣряется половиною Bb = mB. И такъ mtf = tmB. Слѣдовательно ft параллельна mB, или тангенсъ къ циклоидѣ параллеленъ хордѣ круга mB.

§ 105.

Найти площадь циклоидальнаго пространства.

Положимъ, что діаметръ круга раждающаго, фиг. 7 = 1 Bp = x, Pq = dx = fn, Pm = y = $V(x-x^2)$. Поелику треугольникъ lfn ∾ mBP (ибо P = n = R, fln = tfm = BmP) и BP : Pm = fn : ln, или x : $V(x-x^2)$ = dx : ln. Слѣдовательно ln = $\frac{dx\,V(x-x^2)}{x}$. Ежели ln = of умножить на hf = BP = x; то получится площадь безконечно малаго прямоугольника gf которой есть дифференціалъ внѣшняго пространства Bfh. Слѣдовательно $dxV(x-x^2)$ = gf. Но какъ дифференціалъ круговаго сегмента mBP такъ же = $dxV(x-xx)$; то пространство Bfh = BmP; а изъ сего видно, что увеличивая x, на конецъ увидимъ, что BDA = полукружію

BmR.

BmR. Слѣдственно вычетши изъ площади ADBR площадь полукружїя, найдемъ площадь полуциклоиды. И такъ площадь полуциклоиды $= AR.\ BR - \frac{BmR.BR}{4} = \frac{3AR.\ BR}{4}$ (ибо $BmR = AR$), а все пространство циклоидальное $ABC = \frac{3}{2}AR.BR$, и слѣдственно въ трое больше площади раждающаго круга за тѣмъ, что площадь всего круга $= \frac{AR.\ BR}{2}$.

§ 106.

Спрямить дугу циклоиды $Bf = s$ фиг. 7.

Поелику $fn = Pq = dx$, а $ln = \frac{dx\sqrt{(x-xx)}}{x} = dy$; то $lf = ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(dx^2+dx^2.\left(\frac{x-xx}{x^2}\right))} = \sqrt{(dx^2+\frac{dx^2}{x}-dx^2)} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{x}\right)} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = dx.x^{-\frac{1}{2}}$. И такъ интегралъ отъ $ds = s = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{(x.1)}$. По сему s есть удвоенная средняя пропорцїональная линея между абсциссою $BP = x$ и дїаметромъ $AR = 1$ и въ двое больше хорды mB. Такъ же дуга AB въ двое больше дїаметра BR, а вся циклоида $= 4$ дїаметрамъ круга оную раждающаго.

§ 107.

Найти время низхожденія какого нибудь тѣла по дугѣ CB циклоиды фиг. 8.

Проведши CD перпендикуларную къ діаметру $DB = 2r$, описавши полукружіе DnB и abB и предполагая всѣ линеи, кои въ фигурѣ находятся, положимъ $aB = 2a$, $DP = x$, $nP = y$; то Pp будетъ $= dx$, $PB = 2r - x$; а $y = \sqrt{(2rx - xx)}$. Ежели положить, что время низхожденія по дугѣ $Cm = t$; то время низхожденія по дугѣ ms, коя есть дифференціалъ отъ Cm, будетъ $= dt$; но какъ скорость приобрѣтенная паденіемъ по Cm по правиламъ механики пропорціональна $\sqrt{x}$, то есть корню высоты, принимая Cm за наклоненную плоскость, смот. стр. 436 Физики; то пространство во время dt перейденное будетъ $= dt\sqrt{x}$. Ибо во время dt движеніе приемлется за равномѣрное см. стр. 427 Физики. И такъ $ms = dt.\sqrt{x}$ и $dt = \frac{ms}{\sqrt{x}}$. Сверхъ сего поелику тангенсъ mg циклоиды, параллеленъ хордѣ bB; то треугольникъ $mrs \backsim BbP$ (ибо $r = P = R$, уголъ $m = b$) и $ms : rs = bB : PB$, а bB^2, какъ извѣстно изъ геометріи, равенъ $aB . BP$, или $aB : bB = bB : PB$, или $aB : PB = (bB)^2 : (PB)^2$ смот. физ. стр. 436 Изъ сего видно, что $bB : PB = \sqrt{(aB)} : \sqrt{(PB)}$ и $ms : rs = \sqrt{(aB)} : \sqrt{(PB)}$,

или

или ms: $dx = \sqrt{(2a)} : \sqrt{(2r - x)}$. Слѣдственно $ms = \frac{dx \sqrt{2a}}{\sqrt{(2r-x)}}$; поставляя сію величину въ прежнемъ уравненіи вмѣсто ms, получимъ $dt = \frac{dx. \sqrt{2a}}{\sqrt{(2r-x.)}\sqrt{x)}} = \frac{dx \sqrt{2a}}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{2rdx \sqrt{2a}}{2r\sqrt{(2rx-xx)}}$. А ежели теперь вспомнимъ изъ § 69, что $no = d\,(nD) = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$, то $dt = \frac{no.\ 2\sqrt{2a}}{2r}$ и $t = nD.\ \frac{2\sqrt{2a}}{2r}$, ибо $nD =$ интегралу отъ no. Ежели дуга циклоиды Cm сдѣлается дугою CB; то Dn сдѣлается $= DnB$, и время низхожденія по $CB = t = \frac{DnB. 2\sqrt{2a}}{2r} = \frac{DnB\ c}{DB}$ (полагая $2\sqrt{2a} = c$). По сему время низхожденія по дугѣ $AB = T = \frac{c.abB}{aB}$. Отсюда $t : T = \frac{DnB}{DB} : \frac{abB}{aB}$ и поелику содержаніе между полукружіемъ и діаметромъ всегда одинаково; то третій членъ равенъ четвертому, а слѣдственно и $t = T$. т. е. въ циклоидѣ всѣ дуги перебѣгаются въ одинакое время, ежели нѣтъ отъ посредствующихъ тѣлъ препятствія.

§ 108.

Поелику время t низхожденія по дугѣ CB $= \frac{DnB. 2\sqrt{2a}}{2r}$; то 2r: DnB $=$ $2\sqrt{2a}$: t; и какъ $2\sqrt{2a}$ $= \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$, то 2r: DnB $= \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$: t. Но извѣстно, что скорость отъ паденія вертикальнаго по діаметру aB $= \sqrt{(2a)}$; а по тому $\frac{1}{2}\sqrt{(2a)}$ означаетъ половину сей скорости приобрѣтенной отъ паденія по діаметру круга раждающаго циклоиду. И такъ полагая время паденія по aB$=$p, получимъ пространство въ то же время p движеніемъ равномѣрнымъ описываемое $=$ 2aB. Слѣдовательно $\sqrt{(2a)} = \frac{2aB}{p}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{(2a)} = \frac{aB}{p}$, $p = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{(2a)}}$. Поставляя сію величину въ пропорціи 2r: DnB $= \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{(2a)}}$: t, откроемъ, что 2r: DnB$=$p: t, или время низхожденія по діаметру круга раждающаго циклоиду, содержится ко времени низхожденія по какой нибудь дугѣ циклоиды такъ, какъ діаметръ, къ своей полуокружности.

§ 109.

Представимъ себѣ превращенную полуциклоиду, фиг. 9 находящуюся на перпендикуларной плоскости къ горизонту такъ, что бы E означало верхъ, а AB параллельная горизон-

ту

ту представляла бы основанїе; и ежели въ точкѣ B повѣшенъ будетъ отвѣсъ P на ниткѣ такой же длины, какъ полуциклоида, по томъ ниткою обоймемъ циклоиду и оставимъ отвѣсъ въ свободѣ; то точка P удаляясь отъ E постепенно, будетъ удалять нитку отъ всѣхъ точекъ циклоиды и опишетъ другую полуциклоиду EPg равную прежней ETB, коея верхъ будетъ въ g и ось gD будетъ перпендикуларна къ горизонту. На оси AE описать надлежитъ полкруга fAE раждающаго циклоиду, провесть EF, которая бы пересѣкала вертикальную линею Bg въ D, взять Dg = AE, и на дїаметрѣ Dg описать кругъ. Ежели нитка поддерживающая отвѣсъ придетъ въ вертикальное положенїе, то тѣло P будетъ въ g. Ибо полуциклоида BE = 2AE. По томъ ежели чрезъ точки P и T провесть линеи Tf и PH параллельныя съ ED; то, поелику часть нитки TP разтянувшаяся въ прямую линею равна дугѣ ET, которую она прежде закрывала; тотъ часъ видно, что TP = 2Ef = 2TN, (ибо TP параллельна съ Ef). Слѣдовательно TN = PN, линея EN равно отстоитъ отъ Tf и отъ PH, Ef и HD суть равныя хорды (ибо yE = Dl, и yf = Hl) такъ какъ половинныя хорды равно отстоящїя отъ тангенса, а слѣдов. и отъ центра).

По сему дуга Ef= дугѣ HD и хорда Ef параллельная NP, параллельна HD за тѣмъ, что уголъ сегмента fED= углу EDH и ND равна PH, (ибо параллельныя между параллельными равны между собою). Но какъ по свойству циклоиды дуга круга Ef= HD= fT и Af= ND= PH= gH; то назвавъ gH= x, PH = y, получимъ x = y, уравненіе для циклоиды. Но ежели аппликаты PL оканчиваются на оси, то y= x+ ſin x, другое уравненіе для циклоиды.

§ 110.

Ежели полуциклоида BF = BE будетъ въ такомъ же превратномъ положеніи, какъ BE; то тѣло P можетъ пройти длину полуциклоиды gF = gE между тѣмъ, какъ нитка будетъ удаляться отъ полуциклоиды BtnF. И такъ посредствомъ двухъ циклоидальныхъ дугъ BE, BF можно сдѣлать, чтобы отвѣсъ описывалъ дуги превращеній циклоиды EgF.

§ 111.

Ежели отвѣсъ отъ P доходитъ на пр. до M; то онъ производитъ одинъ размахъ слѣд. можно сдѣлать, чтобъ отвѣсъ дѣлалъ свои размахи или качанія по дугѣ циклоиды. Но какъ по § 108 время низхожденія по какой-

койнибудь дугѣ циклоиды Pg ко времени паденія по діаметру Dg содержится какъ полуокружность къ своему діаметру; то время размаха по дугѣ PgM равной 2Pg содержится ко времяни паденія по діаметру Dg, или по половинной длинѣ отвѣса, какъ окружность къ своему діаметру.

§ 112.

Поелику дуга круга pgp тѣмъ точнѣе сходится съ дугою циклоиды; чѣмъ она меньше; то приемлется за истинну, что отвѣсъ совершающій по весьма малымъ дугамъ размахи, совершаетъ ихъ въ равныя времена, хотя бы сіи дуги были и не равны.

§ 113.

Отсюда видно, что время размаха совершаемаго отвѣсомъ по весьма малой дугѣ круга pgp сдержится ко времяни паденія по діаметру Dg, какъ окружность къ своему діаметру.

§ 114.

Полагая время размаха $= T$, время паденія по діаметру Dg или по половинной длинѣ отвѣса $Bg = t$, окружность $= P$, діаметръ $= d$; получимъ $T : t = P : d$ или $T = \frac{P}{d} \cdot t$. По сему

на-

называя время размаха совершаемаго другимъ отвѣсомъ буквою Q, а время паденія по половинѣ его $= q$, получимъ $Q = \frac{P}{d} \cdot q$ Слѣдственно $T : Q = t : q$; но какъ времена содержатся при паденіи тѣлъ съ верху въ низъ, какъ корни квадратные изъ пространствъ. См. стр. 427 физики; то явно, что времена размаховъ содержатся какъ корни квадратные изъ половинныхъ, а слѣдственно и изъ цѣлыхъ долготъ отвѣсовъ см. стр. 443 физики.

§ 115.

О квадратриксѣ.

Ежели четверть круга BnD фиг. 10 раздѣлится на равныя безконечно малыя части и радіусъ BA на такое же число равныхъ частей раздѣленъ будетъ, а по томъ къ точкамъ дѣленія четверти круга проведутся радіусы An, An и проч. чрезъ точки же дѣленія радіуса протянутся pm; pm и пр. съ AD параллельныя; то чрезъ точки пресѣченія m, m и пр. сихъ линей съ радіусами пройдетъ кривая линея называемая *квадратриксъ Диностратова*. Положивъ четверть круга $BnD = a$, $BA = r$, дугу $Bn = x$, $Bp = y$, всегда будемъ имѣть $a : x = r : y$, или $ay = rx$. Дабы найти точку f, въ которой квадратриксъ сходится съ радіусомъ AD, при-

примемъ безконечно малую дугу hD за часть тангенса къ точкѣ D. По сему треуг. AhD ∾ APo, ибо D= R= P, и PoA= oAf, а AP: hD= Po: AD = Af: AD или къ AB за тѣмъ, что o къ f безмѣрно близко и по тому Po= Af, и AD= AB=r. Но какъ BP и Bh суть подобныя части радїуса и окружности; то и остатки AP и hD суть такъ же подобныя части своихъ цѣлыхъ и содержатся какъ цѣлыя, то есть AP: hD= AB: BnD = r: a= Af: r. Отсюда видно, что Af есть третья пропорцїональна къ a и r т. е. четверти круга и радїусу, а четверть круга есть третья пропорцїональная къ Af и r. По сему можно бы было найти линею прямую по геометрїи равную четверти круга, ежели бы Af геометрически опредѣлена была, и площадь круга сравнена бы была совершенно съ квадратомъ. Вотъ причина названїя сей линеи. Но ежели точка o сойдется съ f; то Po параллельная съ AD, нигдѣ не пересѣчетъ Ah, которая тогда упадетъ на AD и слѣдовательно точки f опредѣлить не можно; ежели же hD принять за весьма малую дугу; то безъ чувствительной погрѣшности можно положить Po= Af.

§ 116.

Въ заключенїе всѣхъ сихъ разсужденїй упо-

упомянемъ о дифференцїалахъ второй степени. Дифференцїалы отъ дифференцїаловъ взятые называются *дифференцїалами второй степени.* d(d x)= ddx; d(xdy + ydx)= xddy + dydx + yddx dxdy. Во обще съ дифференцїалами первой степепи въ семъ случаѣ поступать должно точно такъ какъ съ перемѣнными количествами, ежели по силѣ задачи не будетъ видно, что который нибудь изъ дифференцїаловъ будетъ постояненъ.

§ 117.

Главнѣйшее употребленїе сихъ дифференцїаловъ состоитъ въ слѣдующихъ матерїяхъ: 1) Находить радїусъ *кривизны* см. § 50 2) Находить точки противнаго наклоненїя (Puncta flexus contrarii).

§ 118.

Опредѣлить длину радїуса кривизны (Radium evolutae, Radium osculi), когда аппликаты PM кривой AMD къ оси AB перпендикуларны фиг. 13.

Положимъ, что pm безконечно близка къ PM такъ какъ и радїусъ CM къ Cm, проведемъ CE параллельную оси, которая пресѣчетъ аппликату въ E. Поелику при R и E углы прямые и RMm= EMC, ибо общїй имѣютъ

ютъ уголъ дополненія къ 90° CMR; то MR: $Mm = ME : MC$, или $dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = z : z \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Но какъ центръ дуги Mm находится въ C и радіусъ MC при перемѣнныхъ ME и mR постояненъ; то дифференціалъ радіуса CM въ отношеніи къ дифференціалу mR линеи ME ничего не значитъ. И такъ дифференціалъ радіуса MC, принимая dx за постоянное количество т. е. за равное во всѣхъ точкахъ кривой линеи, будетъ $= dz. dx \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{(dx)^2} + \frac{zdyddy.dx}{dx^2\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \left(\frac{dzdx^2dx.+dxdzdy^2+zdyddy.dx}{dx^2\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right) = \frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. По сему $dzdx^2+dzdy^2+zdy\,ddy = o$, и $dz\,dx^2+dz\,dy^2 = -zdy\,ddy$, а $z = \frac{dz\,dx^2+dz\,dy^2}{-dyddy}$; но какъ $dz = dy$ (ибо приращеніе y и ME есть одно и тоже); то $z = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, а $MC = r = \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$. Теперь, ежели величину dy^2 и ddy изъ уравненія для каждой кривой линеи опредѣлить

чрезъ

чрезъ x; то найдется величина z, а по тому и величина r.

§ 119.

Въ Параболѣ $px = y^2$, $pdx = 2ydy$, $dy = \frac{pdx}{2y}$, $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$; $dy^2 + dx^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2} + dx^2 = \frac{(p^2 + 4y^2)\,dx^2}{4y^2} = \frac{(p^2+4px)\,dx^2}{4px}$. Что же касается до знаменателя найденной формулы $-ddy$, то онъ найдется изъ $dy = \frac{pdx}{2y}$ полагая, что dx есть непремѣнное количество, т. е. $ddy = d\left(\frac{pdx}{2y}\right) = d\left(\frac{pdx}{2\sqrt{px}}\right) = -\frac{pdx \cdot \frac{pdx}{\sqrt{px}}}{4px} = \frac{-p^2dx^2}{4px\sqrt{px}} = -\frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}$, а $-ddy = \frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}$. Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{(p^2 + 4px)}{4px}dx^2 : \frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}} = (p^2+4px)\frac{\sqrt{px}}{p^2} = (p^2+4y^2)\frac{y}{p^2}$. И такъ ежели сїю величину умножимъ на $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$

т. е.

т. е. на корень $\left(\frac{p^2+4px}{4px}\right) dx^2$, или на dx.
$\frac{\sqrt{(p^2+4y^2)}}{2y}$, а по томъ раздѣлимъ на dx
(ибо $r = z.\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{2y}\right)$; то получимъ $r = \frac{(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$.

Сїя формула показываетъ, 1) что радїусъ кривизны въ параболѣ равенъ кубу нормальной линеи раздѣленному на квадратъ половины параметра; ибо нормальная $= \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)}$ (за тѣмъ, что субнормальная $= \frac{p}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sqrt{(p^2+4y^2)}$; кубъ нормальной линеи $= \frac{1}{8}(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}$; будучи же раздѣленъ на $\frac{p^2}{4}$ составитъ прежнюю величину $r = \frac{(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$. 2) Что при самомъ верхѣ параболы $r = \frac{p}{2}$, ибо въ семъ случаѣ $y = 0$. Изъ сего удобно понять, что всякая парабола въ безмѣрно малой дугѣ своей подлѣ самаго верха оси находящейся такую же имѣетъ кривизну,

какую кругъ половиною ея параметра описанный; но какъ упругія тѣла параллельно оси брошенныя въ параболу отскакиваютъ въ фокусъ; то и сферической сегментъ тѣла̀ падающія параллельно его оси въ безмѣрно маломъ отъ нея разстояніи, отбрасываетъ въ фокусъ, или собираетъ вмѣстѣ въ разстояніи полурадіуса.

§ 120.

По сему и сферическія вогнутыя зеркала собирая солнечныя лучи въ безмѣрно маломъ отъ оси разстояніи падающіе въ свой фокусъ, котораго разстояніе отъ верха равно $\frac{1}{4}$ діаметра, могутъ быть зажигательными, хотя и не столь сильно, какъ параболическія. Ибо въ сихъ послѣднихъ всѣ лучи параллельные оси собираются въ одну точку, а̀ въ сферическихъ только тѣ, кои по самой оси падаютъ или безмѣрно къ ней близко, а прочіе отражаются къ другимъ точкамъ, въ слѣдствіе того закона Катоптрическаго, что уголъ паденія всегда равенъ углу отраженія.

§ 121.

Радіусъ кривизны называется *радіусомъ ра-*

разогнутой кривой линеи (radius evolutae) Для разумѣнія сего должно себѣ представить, что ежели въ фиг. 9 см. § 109 полуциклоида BTE представляетъ какую нибудь кривую линею и нитка ее покрывающая, съ равнымъ вездѣ напряженїемъ, удаляясь мало по малу описываетъ другую кривую линею EPg; то первая называется въ разсужденїи другой *разогнутою* (BTE evoluta curvae EPg); а линея на пр. TP *радїусъ кривизны*, или *радїусъ разогнутой кривой линеи*. Онъ очевидно равенъ дугѣ ET. см. § 109.

§ 122.

Когда кривая линея AFK фиг. 11 съ начала вогнутою, а по томъ выпуклою къ оси AE обращается стороною, а между тѣмъ отъ оси удаляется ; то точка F, въ коей сей поворотъ кривой линеи произходитъ, называется *поворотною точкою*; а та точка, въ которой она опять обращается къ оси , *возвратною точкою*. Обѣ онѣ называются *точками противнаго наклоненїя*.

§ 123.

Ежели кривая линея имѣетъ одну *точку поворотную*; то линея AT съ обсциссою AP до тѣхъ поръ увеличиваются, пока абсцисса

 дой-

дойдетъ до E, ибо какъ скоро кривая линея поворотится, то линея AT начнетъ уменьшаться, а абсцисса продолжаетъ увеличиваться. По сему можно линею AL принять за самую большую въ своемъ родѣ.

§ 114.

На противъ того, ежели кривая линея имѣетъ *возвратную точку*; то съ начала линея AT растетъ съ абсциссою до L, по томъ послѣ возвращенія кривой линеи къ оси, AT продолжаетъ увеличиваться, а абсциссы пойдутъ на задъ и будутъ уменьшаться такъ, что AE въ семъ случаѣ можно почесть за самую большую.

§ 125.

Поелику $AL = \frac{ydx}{dy} - x$; то принимая dx за постоянную величину, получимъ $\frac{(dy)^2 dx - yddydx}{(dy)^2}$ $- dx = o$ т. е. $dy^2dx - yddydx - dy^2dx = o$, и $- yddy = o$, $ddy = o$.

§ 126.

Легко примѣтить, что при самой большей аппликатѣ нѣкоторыхъ кривыхъ линей какъ то на пр. круговой, тангенсъ бываетъ

па-

параллеленъ оси, слѣдственно и субтангенсъ безконеченъ, или $\frac{ydx}{dy} = \infty$; но ежели кривая линея имѣетъ видъ, какъ въ фиг. 12, при самой меньшей аппликатѣ GC, тангенсъ упадетъ на нее и субтангенсъ равенъ будетъ нулю, или $\frac{ydx}{dy} = o$. Въ первомъ случаѣ долженъ быть $dy = o$, во второмъ $dy = \infty$. По сему для сысканія самой большей, или самой меньшей аппликаты не всегда должно полагать дифференціалъ ея равнымъ нулю, но иногда равнымъ безконечности, что и въ другихъ случаяхъ употребить можно см. § 12 калк.

§ 127.

Изъ сего видно, что особливо при кривыхъ линеяхъ имѣющихъ точки противнаго наклоненія, надлежитъ ddy полагать не только равнымъ нулю; но и равнымъ безконечности и чрезъ то опредѣлять, могутъ ли онѣ быть, или нѣтъ.

На пр. Въ Параболѣ, полагая параметръ равнымъ единицѣ, $y^2 = x$, $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ $= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. dx$; $ddx = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2 = o$, прини-

мая dx за постоянное количество; отсюда $\frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 0$ и $1 = 0$. Такъ же полагая $-\frac{dx^2}{4\sqrt{x^3}} = \infty$, получимъ $\sqrt{x^3} = 0$. И такъ поелику величина x не опредѣляется ни чрезъ нуль, ни чрезъ безконечность; то парабола очевидно точекъ противнаго наклоненія не имѣетъ.

§ 128.

На конецъ замѣтить должно, что хотя и кажется съ начала весьма страннымъ, чтобъ можно было отъ дифференціаловъ брать дифференціалы второй степени, а тѣмъ больше высшихъ степеней; но ежели представить себѣ, что при одинакихъ дифференціалахъ абсциссъ не одинакіе будутъ дифференціалы аппликатъ, ибо кривая линея можетъ при каждомъ мгновеніи перемѣнять свою кривизну; то должно будетъ признаться, что dy будетъ перемѣнное количество и слѣдственно ddy возможно. Такъ же и о d^3y, d^4y, d^5y, и пр. разсуждать должно.

§ 129.

Не выходя изъ предѣловъ моего плана, окончалъ бы я мое сочиненіе симъ замѣчаніемъ, что Аглинскіе математики, слѣдуя великому Нютну (по нашему Невтону) по

сіе

сіе время, вмѣсто dx пишутъ $\dot{x}$, вмѣсто ddx, $\ddot{x}$ и т. д, дифференціальное вычисленіе называютъ *способомъ теченій* (methode of fluxions), а интегральное *способомъ текущихъ*, (methode of fluents). Но дабы окончаніе сдѣлать пріятнѣе, прилагаю рѣшеніе трехъ задачь: 1) Найти центръ тяжести въ фигурѣ ограниченной, либо одною кривою линеею непрерывною, либо съ посредствомъ прямыхъ. 2) Найти центръ тяжести въ тѣлѣ происходящемъ отъ обращенія какой нибудь фигуры около прямой линеи. 3) Найти содержаніе между угломъ паденія совершенно упругаго тѣла на совершенно плоскую поверхность и угломъ отраженія.

а) Поелику изъ механики извѣстно, что ежели къ рычагу привѣшены разныя тяжести и на одномъ его концѣ ничего не находится; то разстояніе центра тяжести отъ сего конца равно суммѣ всѣхъ тяжестей умноженныхъ на свои разстоянія отъ конца, раздѣленной на ихъ сумму. И такъ ежели себѣ представить, что въ фиг. 11 I. Ч. пространство DAL въ какой нибудь точкѣ на пр. U поддерживается подставкою такъ, что всѣ безмѣрно малые трапеціи составляющіе площадь DAL находятся въ равновѣсіи и ось стоитъ горизонтально, а площадь вертикально; то видно будетъ, что точка

U будетъ центръ тяжести, оные трапецїи будутъ тяжести усиливающїяся въ сторону A, или въ сторону L повернуть ось около U. Но какъ каждаго трапецїя величина, или площадь $= ydx$, а умноженная на разстоянїе x, будетъ $= yxdx$; то сумма всѣхъ $yxdx = \int yxdx$, а сумма всѣхъ $ydx = \int ydx$. Слѣдовательно разстоянїе U отъ конца A $= \frac{\int yxdx}{\int ydx}$. Нѣтъ сумнѣнїя, что ежели къ площади DAL придастся равная ей NAL; то всей фигуры DAN центръ тяжести будетъ находиться такъже въ U; или ежели точка U будетъ поддерживаема, то вся фигура DAN будетъ въ горизонтальномъ положенїи стоять спокойно; ибо найдено, что трапецїи между U и L падающїе равносильны трапецїямъ между A и U находящимся въ фигурѣ DAL, слѣдовательно и въ NAL, ибо NAL = DAL. И такъ фигура DAN поддерживаясь въ U не можетъ перевѣситься ни на право ни на лѣво, а равенство DAL съ NAL препятствуетъ ей перевѣситься въ передъ или въ задъ. Прим. Въ параболѣ $y^2 = px$ $y = \sqrt{px}$, $ydx = dx.\sqrt{px}, = dx\sqrt{x}.\sqrt{p}$, $\int ydx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}$; такъ же $yxdx = xdx.\sqrt{px}, = x^{\frac{3}{2}} dx.\sqrt{p}$, $\int yxdx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}.\sqrt{p}$. Слѣд. $\frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{3}{5}x$ т. е.

центръ

центръ тяжести параболической фигуры DAN отстоитъ отъ верха A на $\frac{3}{5}$ AL.

b) Для нахожденія центра тяжести въ тѣлахъ, вмѣсто трапецїевъ должно принять безмѣрно малые усѣченные конусы, изъ коихъ толстота каждаго $= \frac{\pi}{2} y^2 dx$, а умноженная на разстояніе отъ верха $= \frac{\pi}{2} . y^2 x dx$. И такъ разстояніе центра тяжести всякаго тѣла $= \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$. Прим. Въ параболѣ $y^2 x dx = p x^2 dx$, $\int y^2 x dx = \frac{p x^3}{3}$, $\int y^2 dx = \frac{p x^2}{2}$ слѣд. разстояніе центра тяжести въ коноидѣ отъ верха $= \frac{2}{3} x$.

c) Ежели совершенно упругое тѣло изъ A брошенное фиг. 14. въ плоскость BE, по отраженіи будетъ въ D; то AB, DE, и BE будутъ извѣстны. И такъ AB $= a$, DE $= b$, BE $= c$, BC $= x$, CE $= c - x$. AC $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$, CD $= \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$. Сей путь движущагося тѣла равный AC+CD долженъ по мнѣнію нѣкоторыхъ физиковъ быть по тому самый кратчайшій, что съ мудростію натуры сходственно дѣйствовать всегда самыми кратчайшими путями. Но ежели бы кто и усумнился

въ семъ положенiи; то онъ бы увѣрился, что AC+CD должно быть постоянное количество; ибо мы ищемъ закона, по которому тѣло изъ A по отраженiи должно приходить въ D. Слѣд. d (AC+CD) по обоимъ мнѣнiямъ равенъ нулю. И такъ видно,

что $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{xdx - cdx}{\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}} = o$, и

что $\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{c-x}{\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}}$, то есть

$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD}$; но какъ умноживъ оба количества на r означающiй табличный радiусъ, равенство не изтребится; то выйдетъ, что $\cos p = \cos q$, а слѣдовательно, зная, что p и q суть углы острые, не льзя не согласиться въ томъ, что $p = q$ т. е. уголъ паденiя совершенно упругаго тѣла на совершенно гладкую поверхность равенъ углу отраженiя.

КОНЕЦЪ.

ПОГРѢШНОСТИ.

Знакъ $>$ показываетъ, что какія нибудь слова лишнія, $<$ означаетъ, что какихъ нибудь словъ недостаетъ, — значитъ, счетъ строкъ съ низу страницы.

Напечатано			читать должно
стр.	строк.		
5	6—	$\frac{mdx}{n\sqrt[n]{x^{m-n}}}$	$\frac{mdx}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
7	3—	x^n	$>$
—	1—	$+ mx^{m-1z2} yz^n dx^r y$	$mx^{m-1} y^n z^r dx$
8	4—	d coſx	dxcoſx
—	2—	d coſx	dxcoſx
10	2—	f	a
17	1	дифференціала взять	$>$
23	3—	HL	hl
24	1	ab	AB
28	2	$\frac{bc}{a}$	$\frac{bc}{2a}$

На-

стр.	строк.	Напечатано	читать должно
37	4	$-a+\sqrt{\left(a^2+\frac{ap}{2}\right)}$	$-a+\sqrt{\left(a^2 \quad +\frac{ap}{2}\right)}$
38	6	$\frac{px}{2}4$	$\frac{px}{2}+$
43	7	$\frac{ap^2}{2}+c$	$\frac{ap}{2}+c^2$
49	I	II	$>$
50	7	HTF FHT	HTF = THF
—	I4	FHT,	FHT.
52	I3	r то	что
53	4	$\left(\frac{x+p^2}{4}\right)$	$\left(x+\frac{p}{4}\right)^2$
—	8	FK^2-	$FK^2=$
—	7—	m	M
54	4—	$\sqrt{\left(a^2 \quad \frac{ap}{2}\right)}$	$\sqrt{\left(a^2+\frac{ap}{2}\right)}$
59	7—	$\left(\frac{a+b}{a}\right)$	$\left(\frac{a+x}{a}\right)$
60	6	и	или
64	5—	CF	OF
—	3—	PG	PS
—	2—	CG	CS

На-

Напечатано			читать должно
стр.	строк.		
65	1	EH	$EH=$
67	10	$u^2=t^2$	$u^2=t$
68	3	a2	az
69	5—	$\frac{m^2}{q^2}$	$\frac{m^2}{t^2}$
70	1—	$\left(\frac{lx-x^2}{l}\right)$	$\left(\frac{2lx-x^2}{l^2}\right)$
70	11	PL^2	$PL^2.$
77	7—	at	$at=$
82	6—	$a^{n-4}b^2$	$a^{n-2}b^2$
83	2	$\frac{x^9}{1152a^7}$	$\frac{5x^9}{1152a^7}$
—	11	$\frac{1}{1152}$	$\frac{5}{1152}$
—	—	$\frac{a^2}{1152}$	$\frac{5a^2}{1152}$
—	12	$\frac{1}{577}$	$\frac{5}{576}$
86	9	AyM и AHX	AyX и AHM

На-

стр.	строк.	Напечатано	читать должно
95	5—	$-\frac{z^5}{5}$	$\frac{z^5}{5}$
102	4	$(d^2x^2)x^2 a y^2 = (b+x)^2 \frac{(b^2-x^2)}{x_s}$	(b^2-x^2), а $y^2 = (c+x)^2 \frac{(b^2-x^2)}{x^2}$
106	6	$\frac{ydx}{dx}$	$\frac{ydx}{dy}$
110	8—	часть физ. табл.	< CM равную одной такой части радїуса, cm = 2 частямъ, слѣдующую
114	10	e	C
	11	p	l
табл. II.	фиг. 29	J	P
———	——	<Q	Q, повыше B въ корпусѣ
табл. III.	фиг. 38	<p, q, s, t, u,	p = DBA, q = EBD, s = SBC, t = CBF, u = FBG
———	фиг. 38	<q, p, m	q = GSV, p = GBP, m = GPB
———	фиг. 42	m не на мѣстѣ	m = углу CDB
———		p	q
		q	p

углы отраженїя r, и n+q.

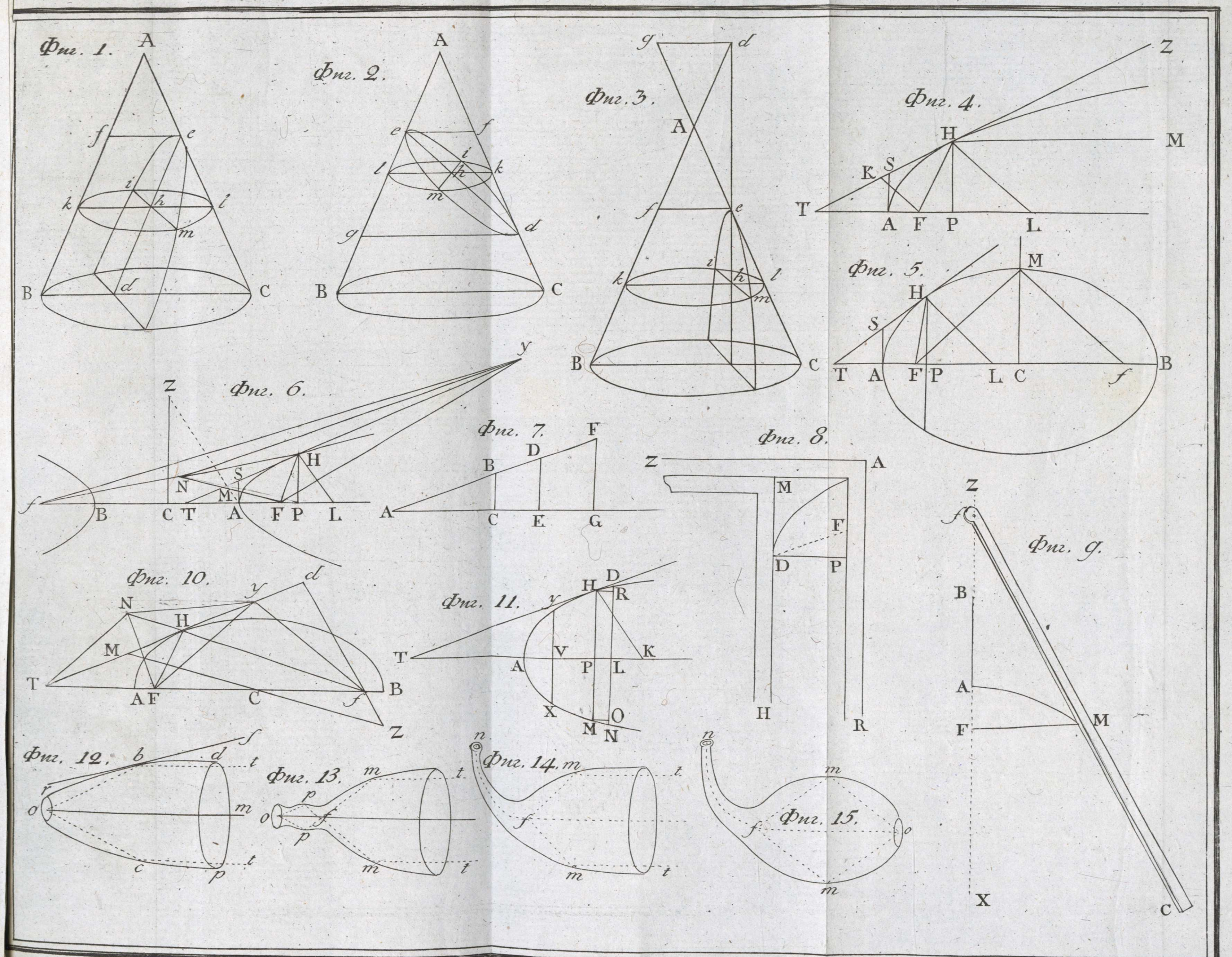
стр. 245 строк. 9 и 11

Напечатано	читать должно
$-p + r$	$-2p+r-q$

На-

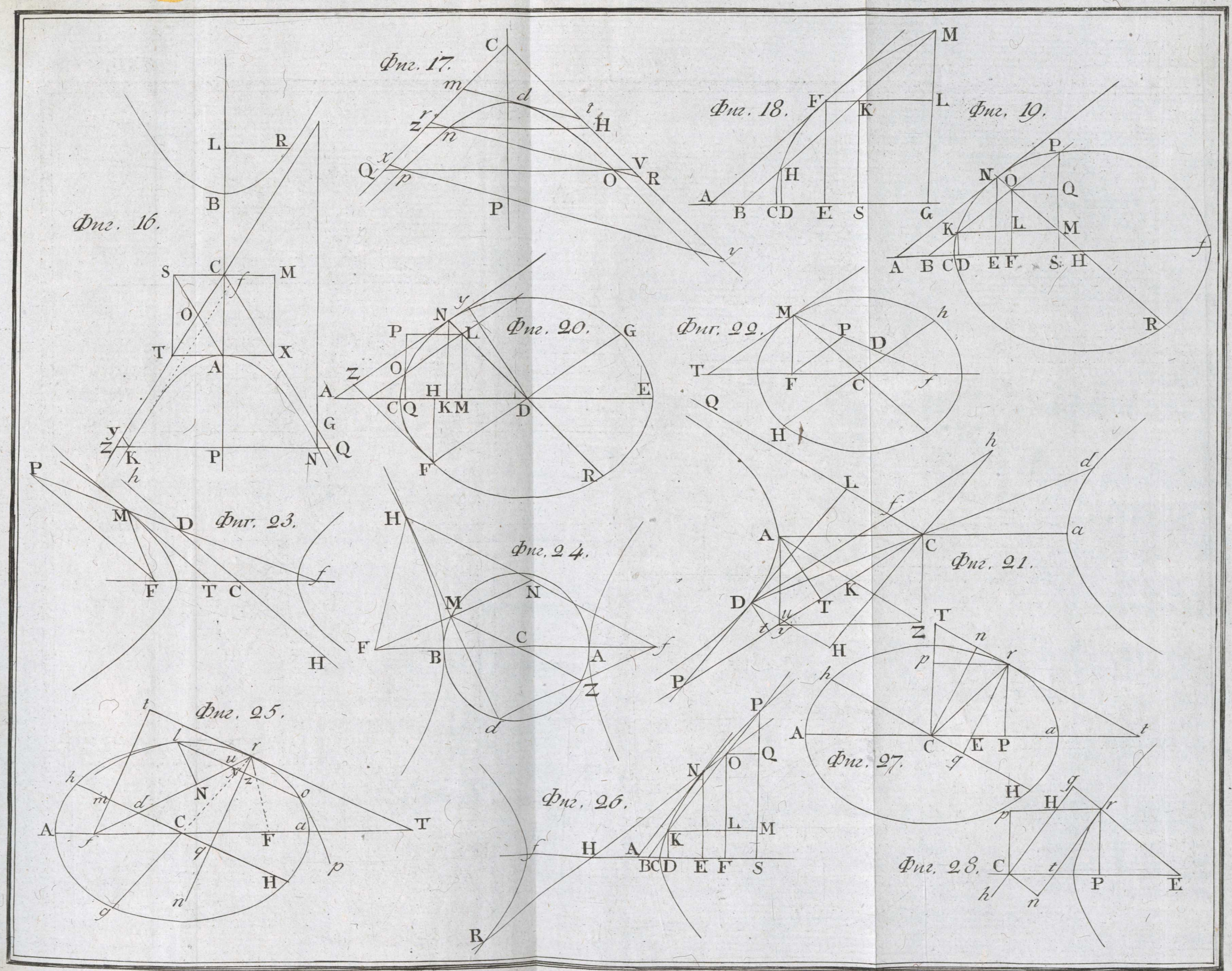
Напечатано	читать должно
табл. V. фиг. 5 <l	l долженъ быть на продолженной линеѣ AK въ низу
——— фиг. 6. B	P
табл. VI. фиг. 19 M	H
——— фиг. 20 <S	между Z — U
——— фиг. 21 <	G и H
ст. 476 — 9 стр. C и во всѣхъ нижнихъ	Z
ст. 480. стр. 16. 18 K	X
ст. 440 стр. 17 двойную	четверную
ст. 463 — 4 — $\frac{A-B}{2}$	$\frac{c-d}{2}$
—— 1 — $\frac{A-B}{A+B}$	$\frac{(A-B)c}{A+B}$
464 4 A=B	< и c=d
465 1 $\frac{bAC}{d}$	$\frac{dAC}{c}$
475 6 — PL, или l=	SL, или l:
—— 3 — 3lb	2plb
—— —— $\frac{2plb}{3bp-pl}$	$\frac{2plb}{3bp+pl}$
табл. VII.	<R при зеркалѣ меньшемъ

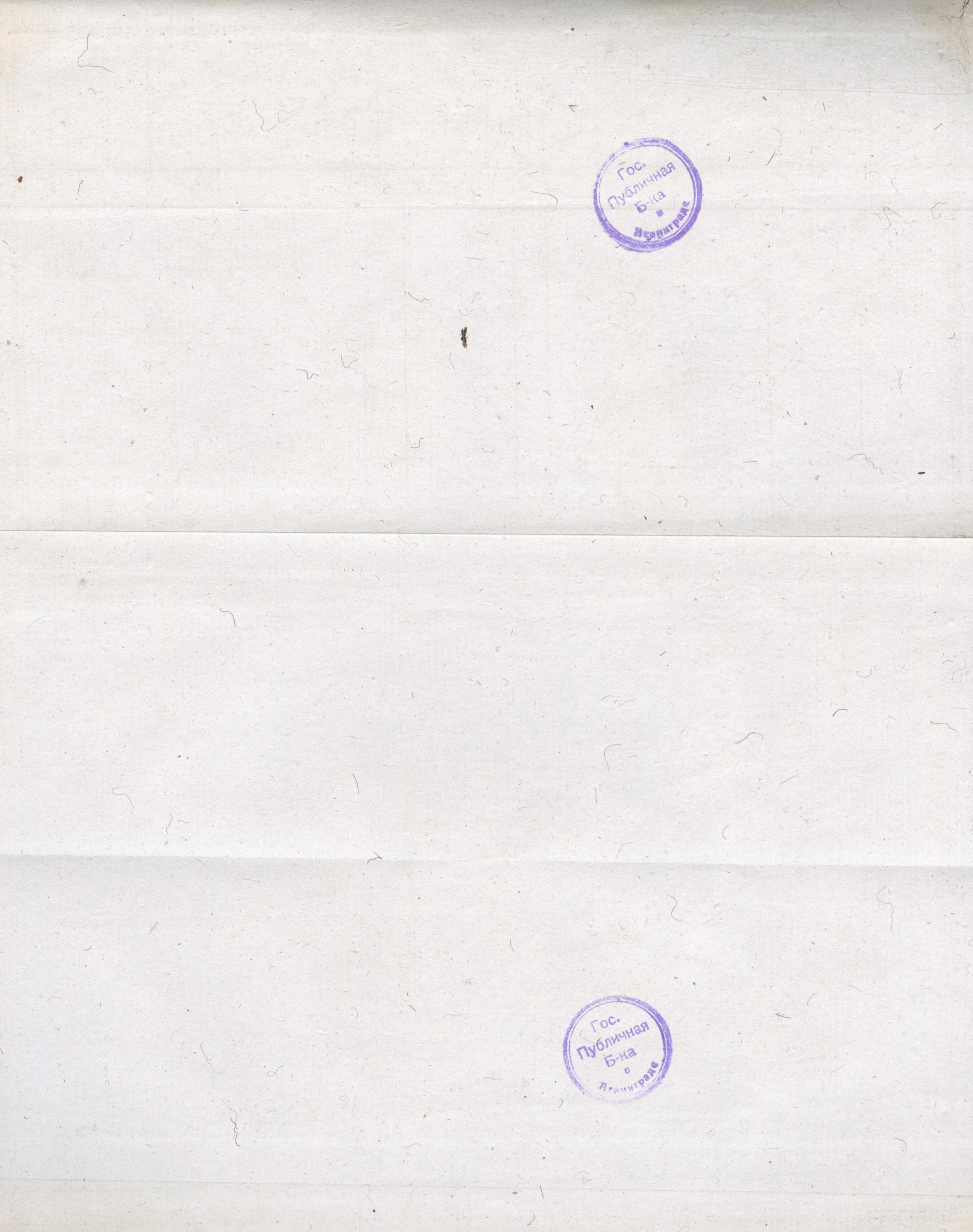
На

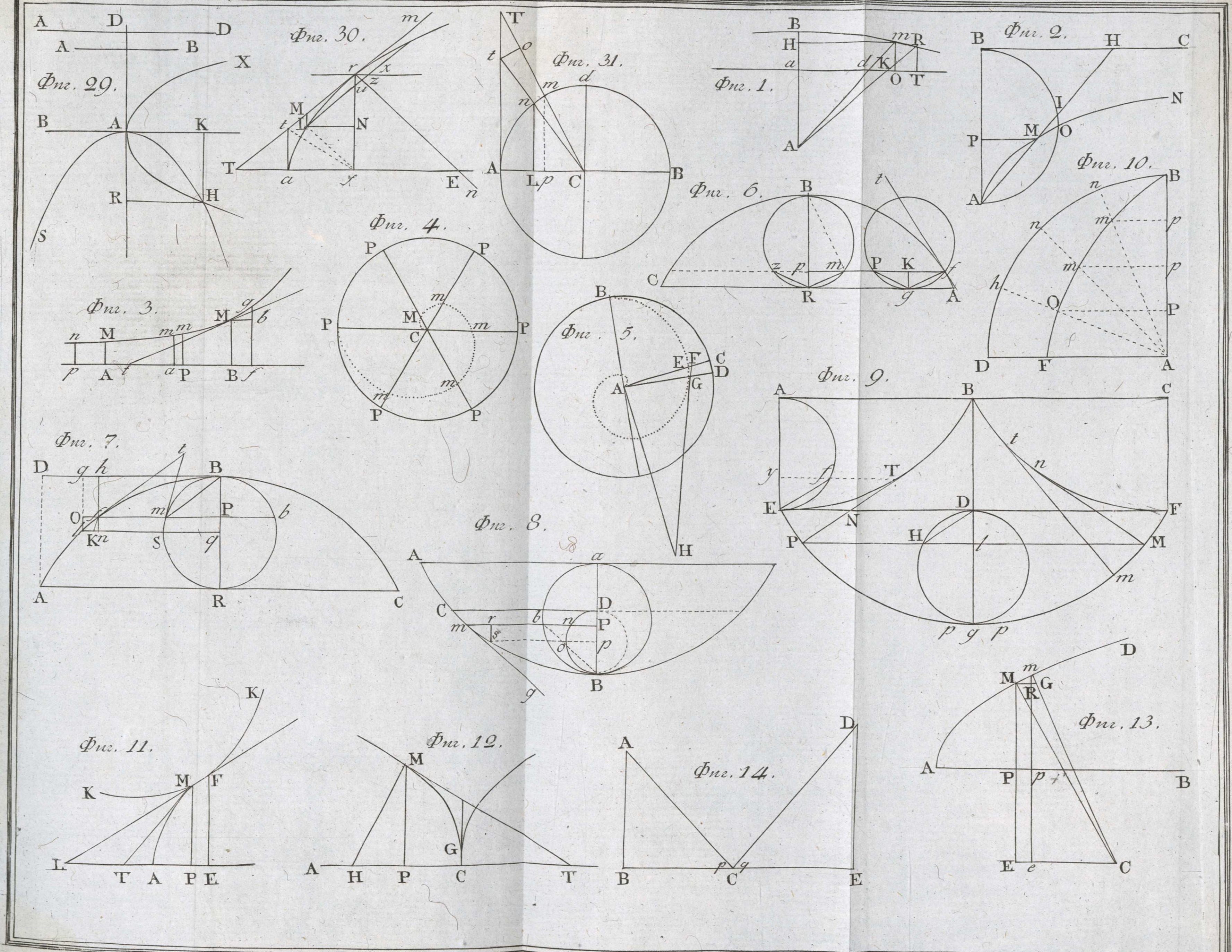

Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 3.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 9.
Фиг. 10.
Фиг. 11.
Фиг. 12.
Фиг. 13.
Фиг. 14.
Фиг. 15.

стр.	строк.	Напечатано	читать должно
ст. 481	стр. 2—		
		I	t
ст. 482	стр. 11	или	или=
—	— 14	AE CF	AE: CF
—	7	E	>
ст. 484	11—		
		F	f
ст. 420	13		
		DE TS	DEIG
таб. VIII.	фиг 75		< K на линеѣ SR
	——		< V на линеѣ SZ
	——		< a на линеѣ rM
стр. 422	8	DETS	DEIG
стр. 431	14	gt^2tC	gt^2+c
стр. 443	стр. 5	$\sqrt{gh}$	$2\sqrt{gh}$

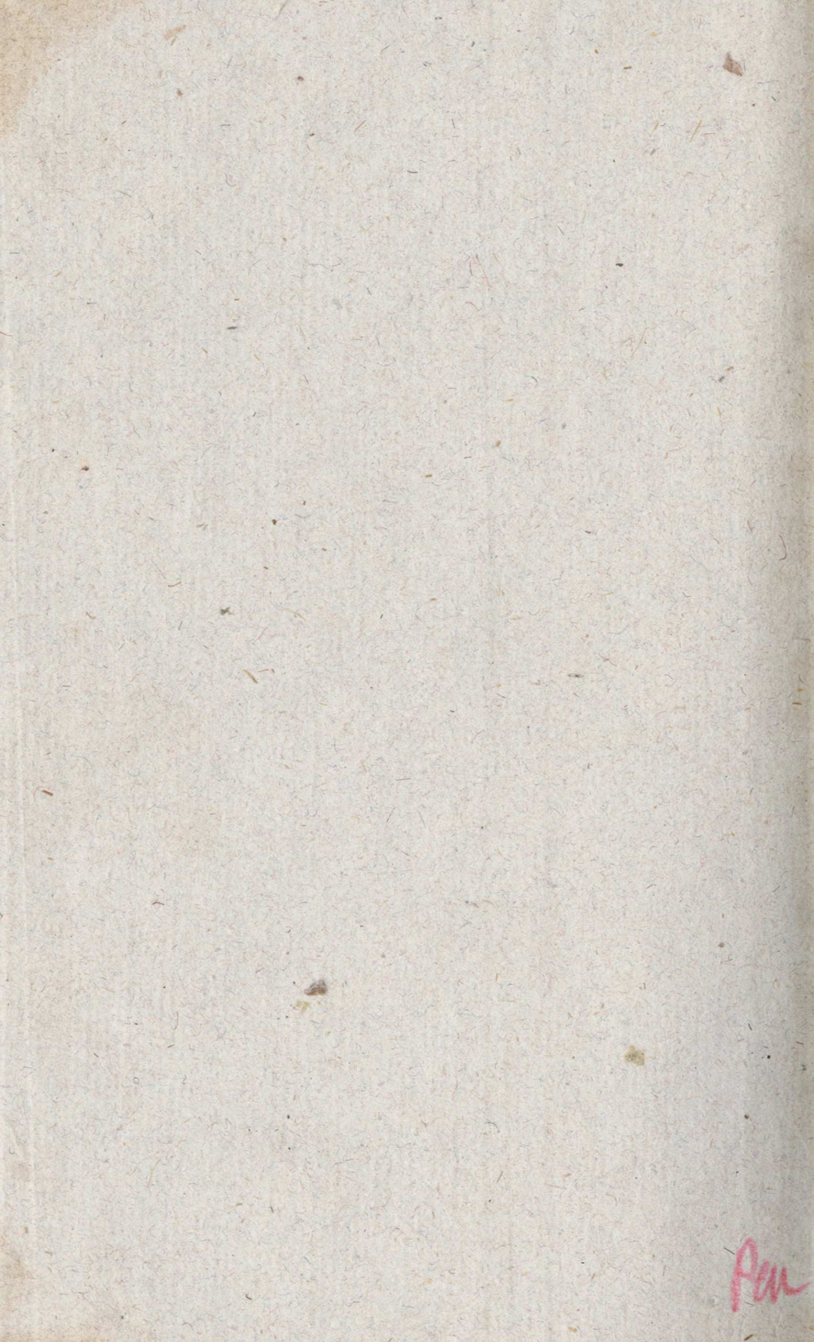



Фиг. 16.
Фиг. 17.
Фиг. 18.
Фиг. 19.
Фиг. 20.
Фиг. 21.
Фиг. 22.
Фиг. 23.
Фиг. 24.
Фиг. 25.
Фиг. 26.
Фиг. 27.
Фиг. 28.


Гос.
Публичная
Б-ка
в
Ленинграде
Гос.
Публичная
Б-ка
в
Ленинграде


Фиг. 29.
Фиг. 30.
Фиг. 31.
Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 10.
Фиг. 6.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 3.
Фиг. 9.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 11.
Фиг. 12.
Фиг. 14.
Фиг. 13.






ГПБ Русский фонд
18. 65. 5. 37.